

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (1)

Méthodes simples basées sur la réponse indicielle

Hypothèses:

*Système d'ordre peu élevé

*Système peu bruité

*Identification pour la synthèse de correcteurs

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (2)

3.1.1 Systèmes apériodiques sans retard

A. Modèle du premier ordre

$$G(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$$

Réponse indicielle

$$u(t) = E v(t)$$

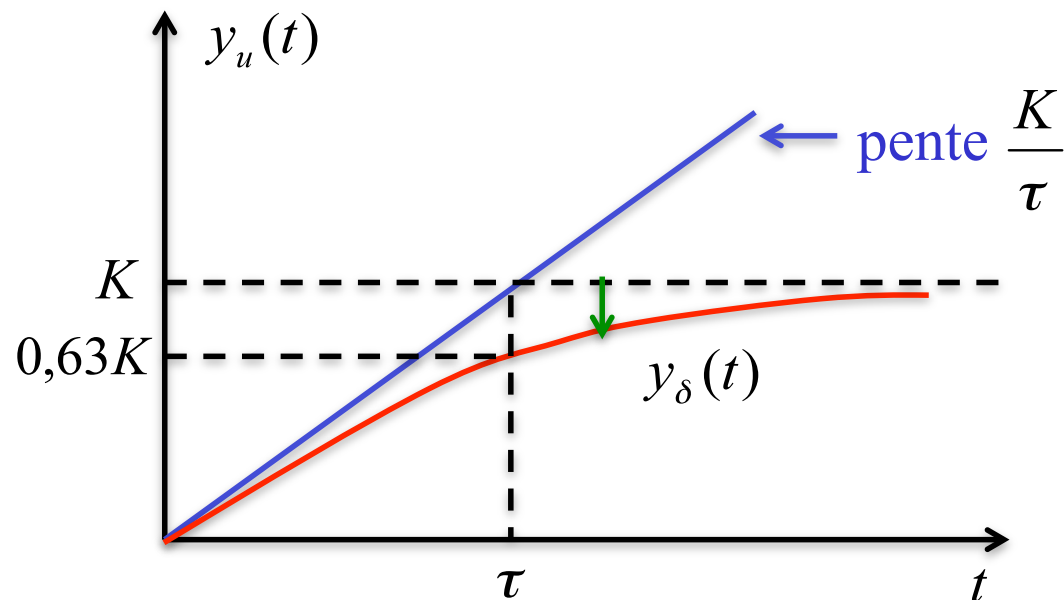
$$y(t) = KE(1 - e^{-t/\tau}) + y(0)$$

$$\begin{aligned} y_u(t) &= \frac{y(t) - y(0)}{E} \\ &= K(1 - e^{-t/\tau}) \end{aligned}$$

Réponse indicielle
(normalisée)

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (3)



Calcul de K

Soit $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{\infty}$

$$\Rightarrow K = \frac{y_{\infty} - y(0)}{E} = \lim_{t \rightarrow \infty} y_u(t)$$

Calcul de τ .

$$y_{\delta}(t) = K - y_u(t) = K e^{-t/\tau}$$

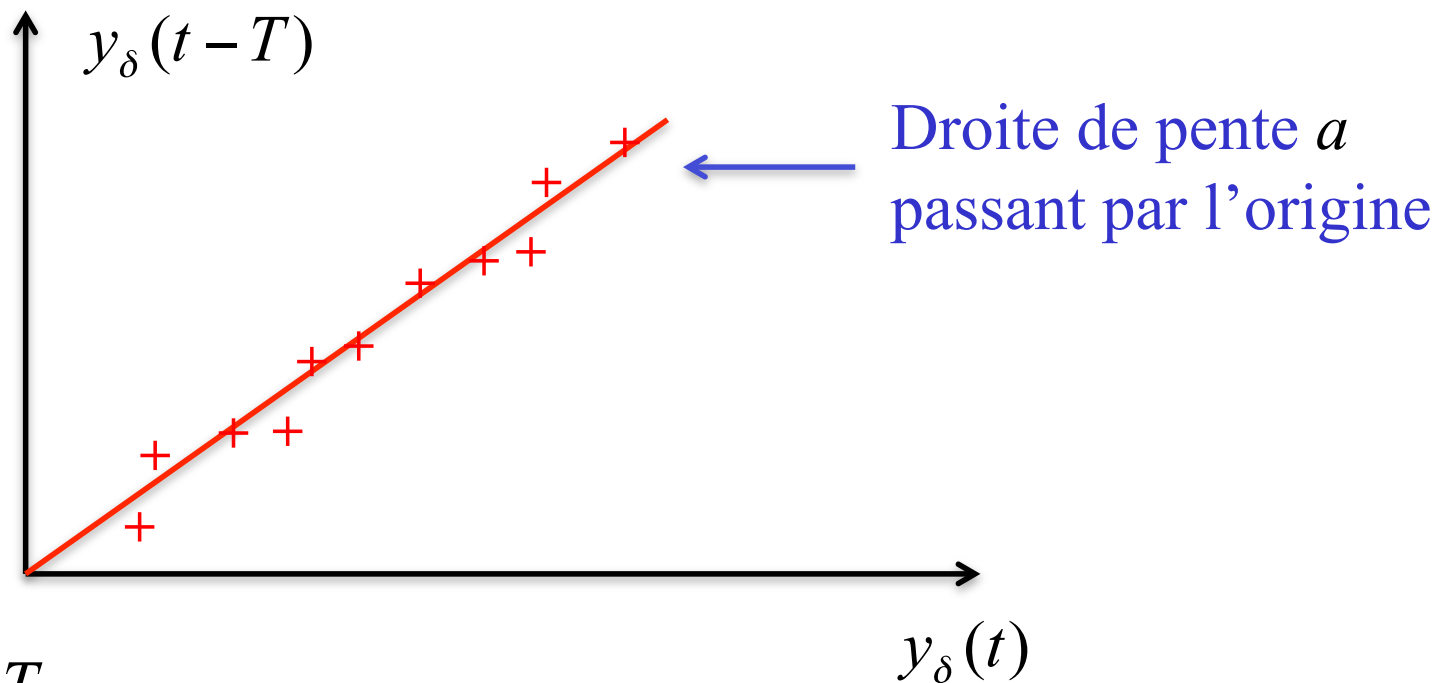
$$y_{\delta}(t - T) = K e^{-t/\tau} e^{T/\tau} = a y_{\delta}(t) \quad \forall t$$

$$\text{où } a = e^{T/\tau}$$

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (4)

Diagramme des points $(y_\delta(t), y_\delta(t-T))$



$$\tau = \frac{T}{\ln(a)}$$

Méthode robuste vis avis du bruit de mesure

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (5)

B. Modèle du deuxième ordre sans zéros

$$G(s) = \frac{K}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$
$$= \begin{cases} K \left[\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \frac{1}{1 + \tau_1 s} + \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \frac{1}{1 + \tau_2 s} \right] & \text{si } \tau_1 \neq \tau_2 \\ \frac{K}{(1 + \tau s)^2} & \text{si } \tau_1 = \tau_2 = \tau \end{cases}$$

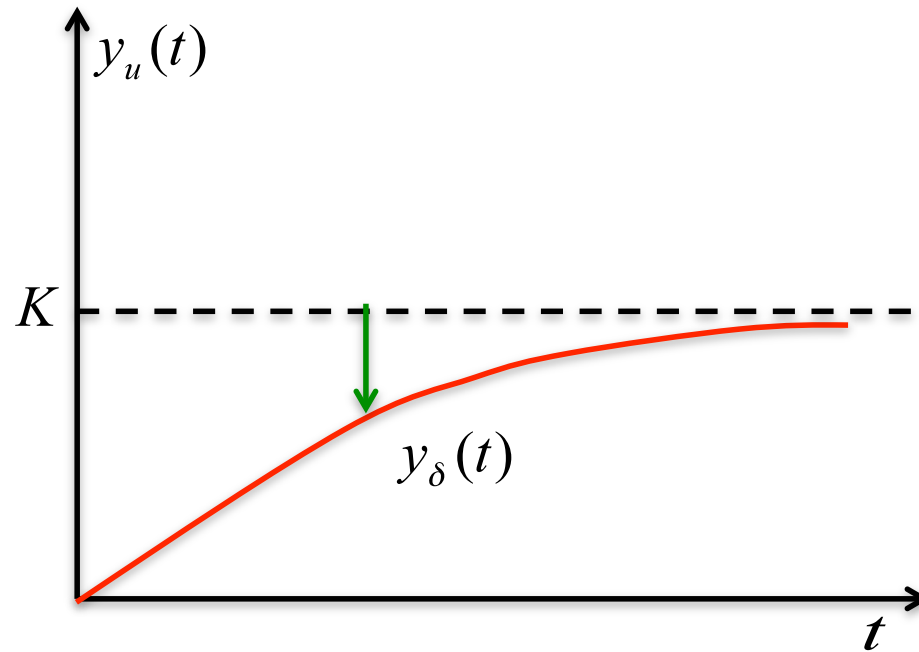
Réponse indicielle

$$u(t) = E v(t)$$

$$y_u(t) = \frac{y(t) - y(0)}{E}$$

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (6)



Calcul de K

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} y_u(t)$$

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (7)

$$\begin{aligned}y_u(t) &= K \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} (1 - e^{-t/\tau_1}) + K \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} (1 - e^{-t/\tau_2}) \\ &= K - \frac{K\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} - \frac{K\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2}\end{aligned}$$

$$\text{Soit } y_\delta(t) = K - y_u(t) = \frac{K\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{K\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_\delta(t - T) = \frac{K\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} e^{T/\tau_1} + \frac{K\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2} e^{T/\tau_2} \\ y_\delta(t - 2T) = \frac{K\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} e^{2T/\tau_1} + \frac{K\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2} e^{2T/\tau_2} \end{cases}$$

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (8)

$$\Rightarrow \exists a_1, a_2 \text{ tels que : } \forall t \ y_\delta(t) = a_1 y_\delta(t - T) + a_2 y_\delta(t - 2T)$$

$$\Leftrightarrow y_\delta(t) - a_1 y_\delta(t - T) - a_2 y_\delta(t - 2T) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{K\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} [1 - a_1 e^{T/\tau_1} - a_2 e^{2T/\tau_1}] + \frac{K\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2} [1 - a_1 e^{T/\tau_2} - a_2 e^{2T/\tau_2}] = 0$$

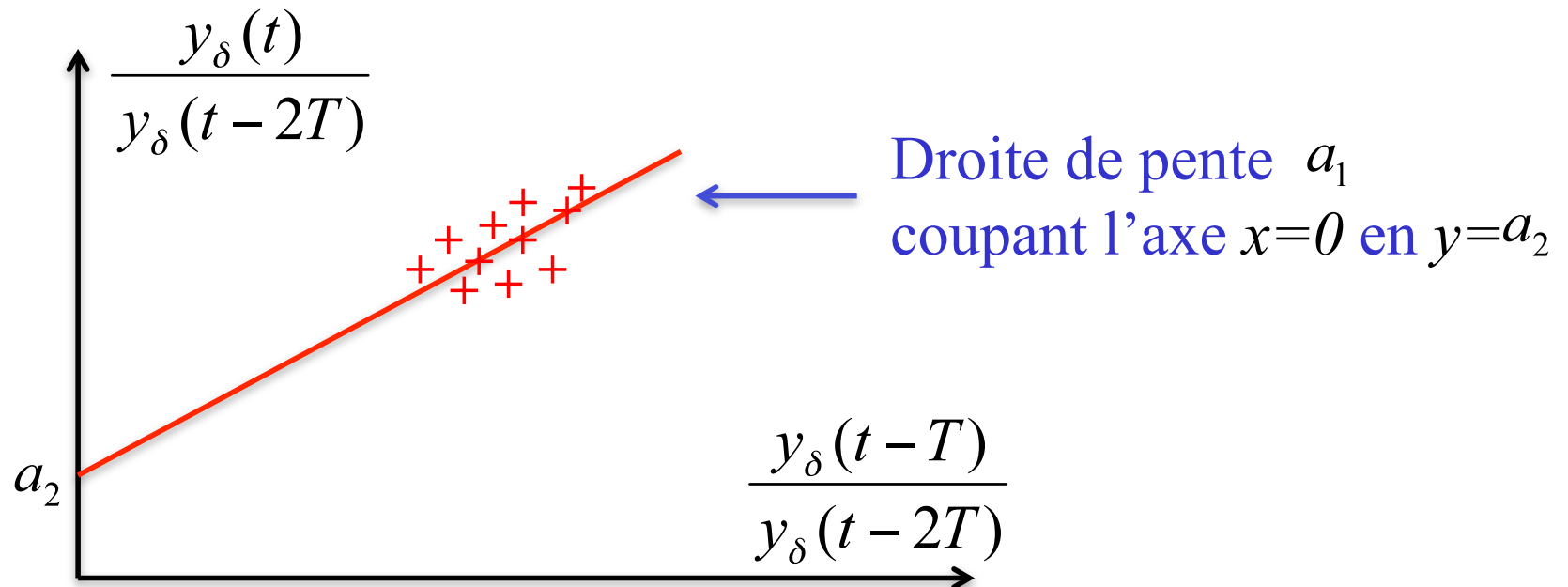
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} e^{T/\tau_1} & e^{2T/\tau_1} \\ e^{T/\tau_2} & e^{2T/\tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (9)

$$\Rightarrow \frac{y_\delta(t)}{y_\delta(t-2T)} = a_1 \frac{y_\delta(t-T)}{y_\delta(t-2T)} + a_2$$

Diagramme des points $\left(\frac{y_\delta(t-T)}{y_\delta(t-2T)}, \frac{y_\delta(t)}{y_\delta(t-2T)} \right)$



III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (10)

$$1 - a_1 e^{T/\tau_1} - a_2 (e^{T/\tau_1})^2 = 0$$

$$1 - a_1 e^{T/\tau_2} - a_2 (e^{T/\tau_2})^2 = 0$$

⇒ Soit x_1, x_2 les solutions de l'équation:

$$1 - a_1 x - a_2 x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = e^{T/\tau_1} \Rightarrow \tau_1 = \frac{T}{\ln(x_1)}$$

$$\Rightarrow x_2 = e^{T/\tau_2} \Rightarrow \tau_2 = \frac{T}{\ln(x_2)}$$

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (11)

3.1.2 Systems apériodiques avec retard

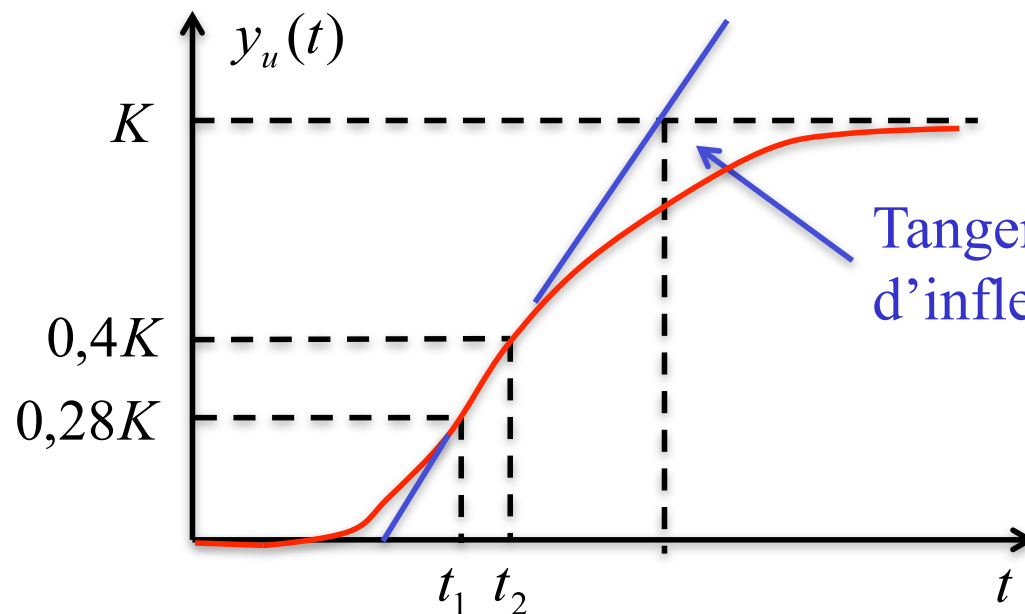
A. Modèle du premier ordre

$$G(s) = K \frac{e^{-T_0 s}}{1 + \tau s}$$

$$y(t) = KE(1 - e^{-(t-T_0)/\tau}) v(t - T_0)$$

$$u(t) = E v(t)$$

$$y_u(t) = \frac{y(t) - y(0)}{E}$$



$$t_1 = t_{28\%}$$

$$t_2 = t_{40\%}$$

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} y_u(t)$$

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (12)

Méthode de Broida

$$\begin{cases} \tau = 2,8 t_{28\%} - 1,8 t_{40\%} \\ T_0 = 5,5 (t_{40\%} - t_{28\%}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau = 1,3 t_{35,3\%} - 0,29 t_{85,3\%} \\ T_0 = 0,67 (t_{85,3\%} - t_{35,3\%}) \end{cases}$$

Méthode empirique

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (13)

B. Modèle d'ordre supérieur

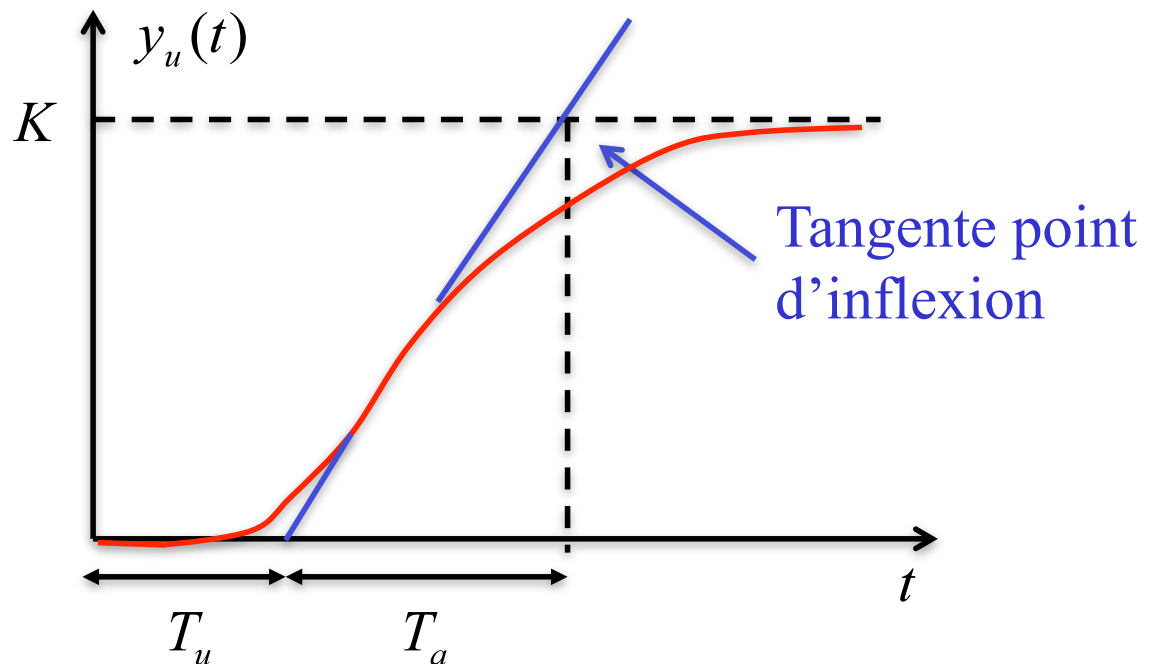
$$G(s) = \frac{K e^{-T_0 s}}{(1 + \tau s)^n}$$

B1 Retard faible $T_0 < \tau$

$$u(t) = E V(t)$$

$$y_u(t) = \frac{y(t) - y(0)}{E}$$

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} y_u(t)$$



III. CALCUL DU MODELE

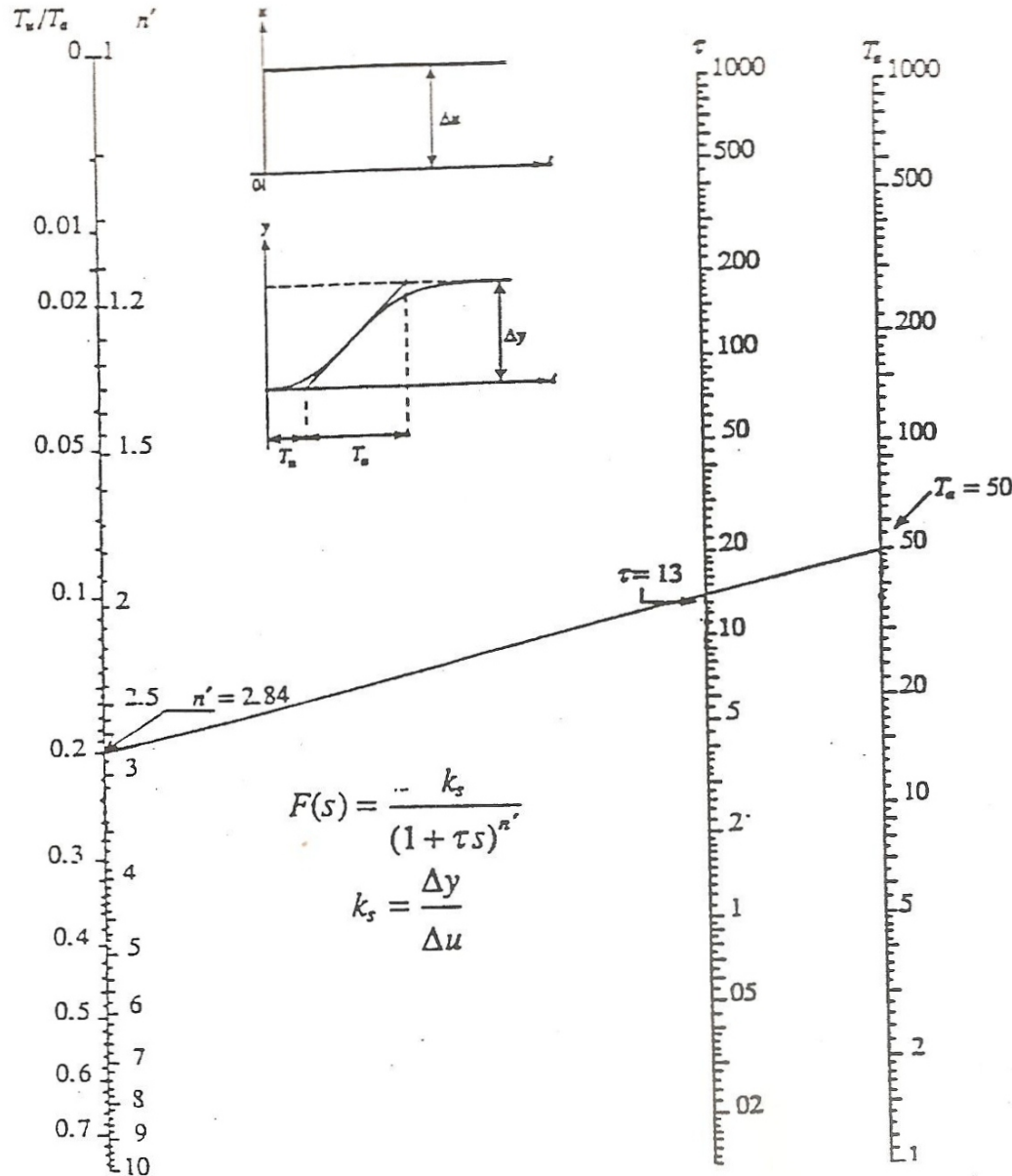
III.1 Méthodes graphiques (14)

Méthode de Strejc

1. Reporter $\frac{T_u}{T_a}$ dans l'abaque $\Rightarrow n'$
2. Joindre $\frac{T_u}{T_a}$ à T_a dans l'abaque $\Rightarrow \tau$
3. $n =$ Entier directement inférieur à n'
4. $T_0 = (n' - n)\tau$

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (15)



Méthode de Strejc

Exemple:

$$T_u = 10 \Rightarrow \frac{T_u}{T_a} = 0,2$$

$$T_a = 50$$

$$K = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n' = 2,84 \\ n = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tau = 13$$

$$\Rightarrow T_0 = 10,9$$

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (16)

Note:

n Peut être obtenu en cherchant η directement inférieur à $\frac{T_u}{T_a}$ dans le tableau

| η | n |
|--------|-----|
| 0 | 1 |
| 0,105 | 2 |
| 0,22 | 3 |
| 0,32 | 4 |
| 0,41 | 5 |
| 0,49 | 6 |
| 0,57 | 7 |
| 0,64 | 8 |
| 0,71 | 9 |
| 0,77 | 10 |

Exemple:

$$\eta = 0,105$$

$$\Rightarrow n = 2$$



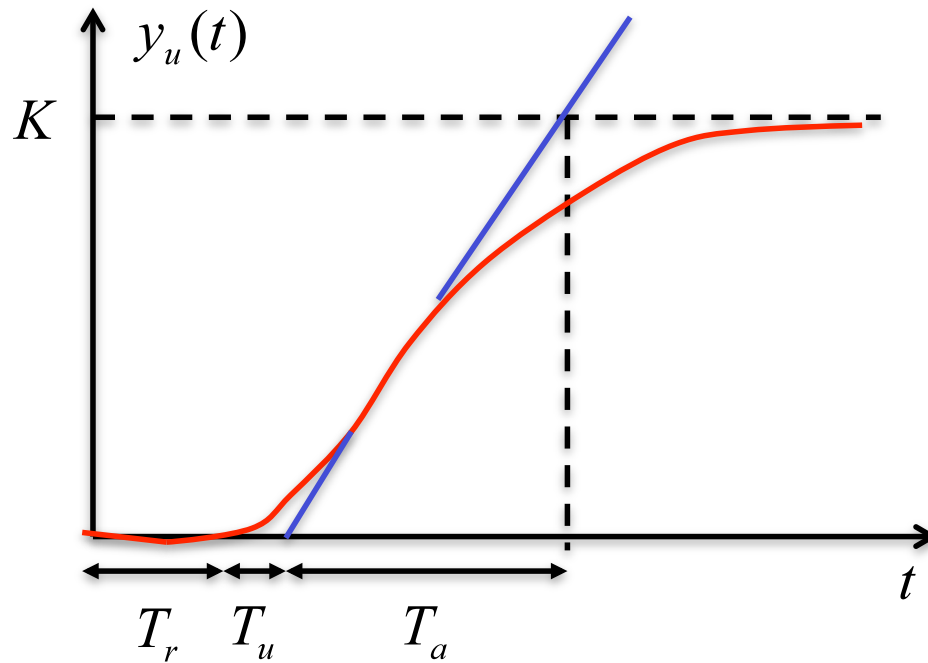
Modèle:

$$G(s) = \frac{2e^{-10,9s}}{(1+13s)^2}$$

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (17)

B2 Retard important $\tau \leq T_0$



$$T_0 = T_r + (n' - n)\tau$$

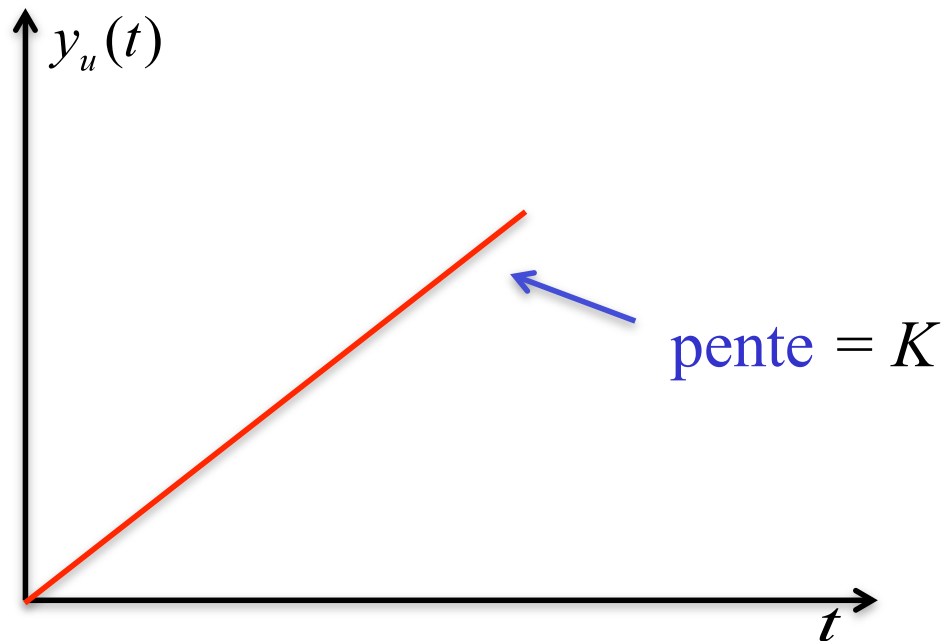
III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (18)

3.1.3 Systèmes avec intégrateur

A. Système intégrateur pur

$$G(s) = \frac{K}{s}$$



$$u(t) = E V(t)$$

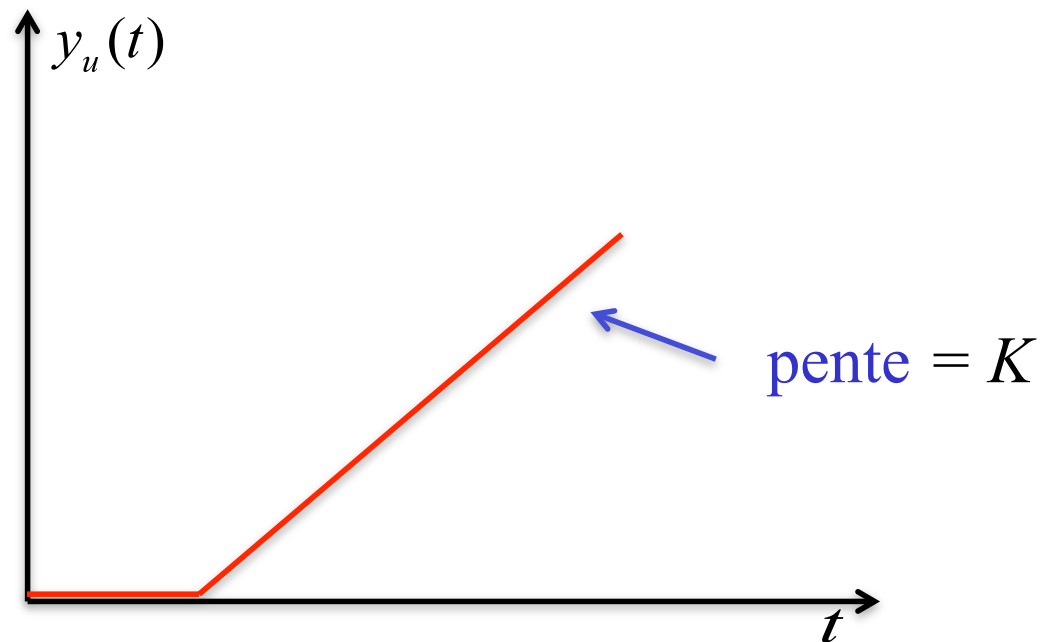
$$y_u(t) = \frac{y(t) - y(0)}{E}$$

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (19)

B. Système intégrateur pur avec retard

$$G(s) = K \frac{e^{-T_0 s}}{s}$$



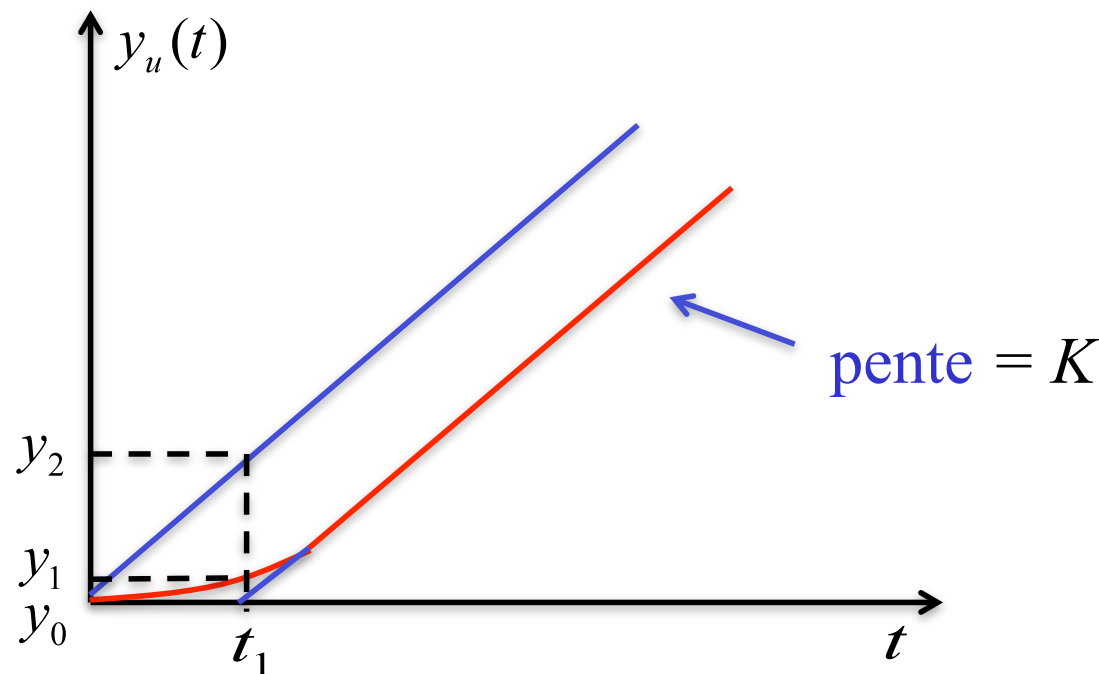
$$T_0 = t_1$$

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (20)

C. Système intégrateur d'ordre supérieur

$$G(s) = \frac{K e^{-T_0 s}}{s(1 + \tau s)^n}$$



$$u(t) = E V(t)$$

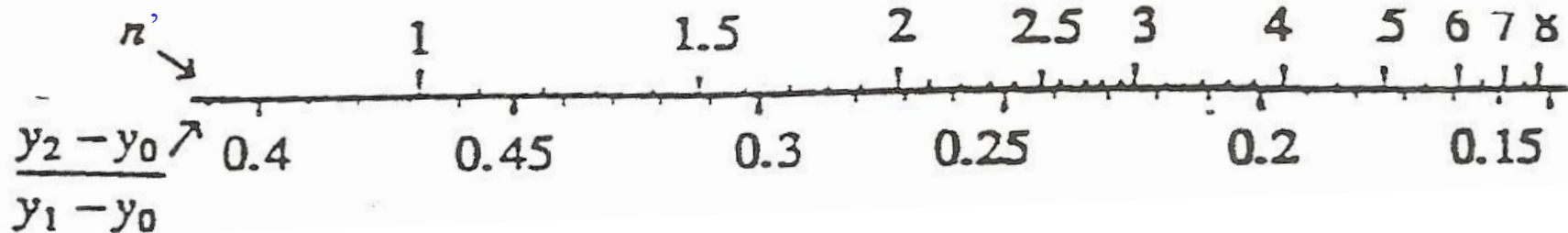
$$y_u(t) = \frac{y(t) - y(0)}{E}$$

$$\frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} = e^{-n} \left(1 + (n-1) + \frac{(n-2)n}{2!} + \frac{(n-3)n^2}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} n^{(n-2)} \right)$$

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (21)

1. Reporter $\frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0}$ dans l'abaque $\Rightarrow n'$
2. $n =$ Entier directement inférieur à n'
3. $\tau = \frac{t_1}{n'}$
4. $T_0 = (n' - n)\tau$



III. CALCUL DU MODELE

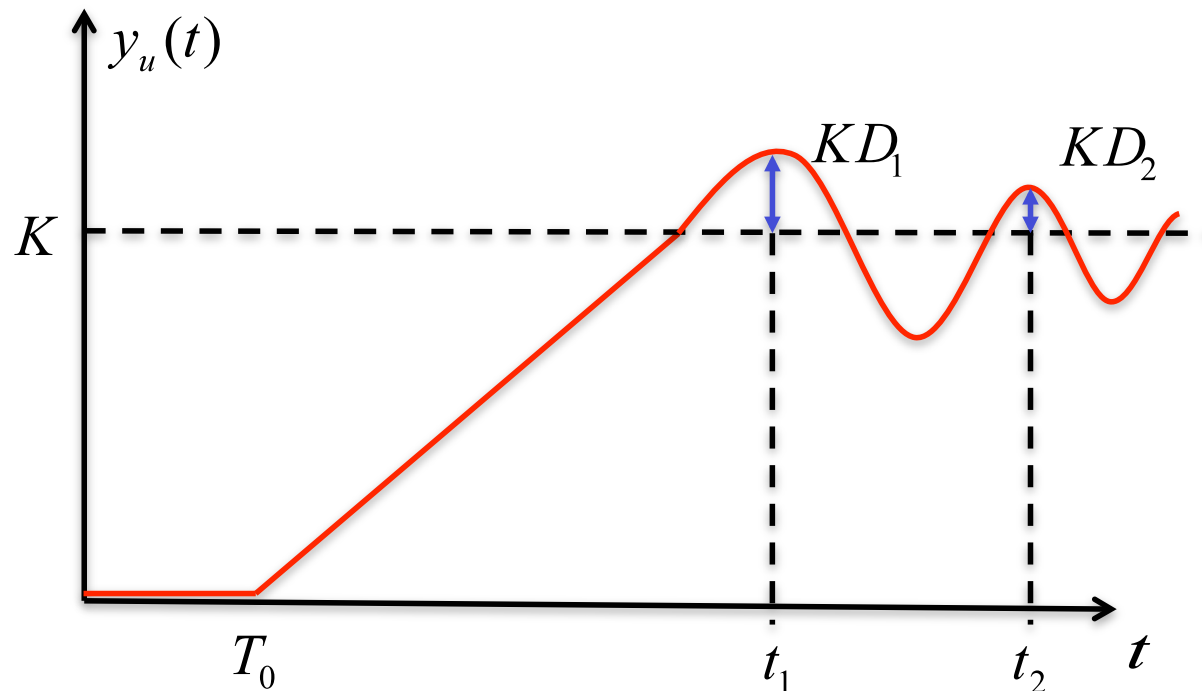
III.1 Méthodes graphiques (22)

3.1.4 Systèmes oscillants

$$G(s) = \frac{K e^{-T_0 s}}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1}$$

$$u(t) = E V(t)$$

$$y_u(t) = \frac{y(t) - y(0)}{E}$$



$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} y_u(t)$$

III. CALCUL DU MODELE

III.1 Méthodes graphiques (23)

$$t_1 - T_0 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad D_1 = K e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$t_2 - T_0 = \frac{3\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad D_2 = K e^{-3\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{t_2 - t_1} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$\frac{D_2}{D_1} = e^{-2\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{D_1}{D_2}$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\frac{1}{2\pi} \ln \frac{D_1}{D_2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2} \ln^2 \frac{D_1}{D_2}}} \quad \omega_n = \frac{2\pi}{t_2 - t_1} \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2} \ln^2 \frac{D_1}{D_2}}$$

$$T_0 = t_1 - \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$$

III. CALCUL DU MODELE

III.2 Algorithme des moindres carrés pondérés (1)

Méthode quadratique : minimisation d'une fonction quadratique de l'erreur de modèle $e = y - y_m$

Modèle LRP: $y_m(t, \theta) = \varphi^T(t)\theta$

 Indépendant de θ

3.2.1 Cas discret N Mesures aux instants $\{t_k\}$

Minimiser le critère quadratique

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^N q(t_k) e^2(t_k)$$

avec $q(t_k) \geq 0$

$$= \sum_{k=1}^N q(t_k) [y(t_k) - \varphi^T(t_k)\theta]^2$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \arg \min_{\theta} J(\theta) \Rightarrow \nabla J(\hat{\theta}) = 0$$

III. CALCUL DU MODELE

III.2 Algorithme des moindres carrés pondérés (2)

$$\begin{aligned}\nabla J(\hat{\theta}) &= -2 \sum_{k=1}^N q(t_k)[y(t_k) - \varphi^T(t_k)\theta]\varphi(t_k) \\ &= -2 \sum_{k=1}^N q(t_k)[\varphi(t_k)y(t_k) - \varphi(t_k)\varphi^T(t_k)\theta] = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^N q(t_k)\varphi(t_k)y(t_k) = \sum_{k=1}^N q(t_k)\varphi(t_k)\varphi^T(t_k)\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \left[\sum_{k=1}^N q(t_k)\varphi(t_k)\varphi^T(t_k) \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^N q(t_k)\varphi(t_k)y(t_k) \right]$$

$$\begin{aligned}\text{Hessien} &= \nabla(\nabla(J(\theta)))^T \\ &= 2 \sum_{k=1}^N q(t_k)\varphi(t_k)\varphi^T(t_k) \geq 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} \text{ minimise } J(\theta)$$

III. CALCUL DU MODELE

III.2 Algorithme des moindres carrés pondérés (3)

Remarques:

1. Si $q(t_k) = q_0$ pondération uniforme

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \left[\sum_{k=1}^N \varphi(t_k) \varphi^T(t_k) \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^N \varphi(t_k) y(t_k) \right]$$

\Leftrightarrow algorithme des moindres carrés non pondéré

2. Système réel LRP et non bruité

$$y(t) = \varphi^T(t) \theta^*$$



« vraies valeurs » des paramètres

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{k=1}^N \varphi(t_k) \varphi^T(t_k) \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^N \varphi(t_k) \varphi^T(t_k) \theta^* \right] = \theta^*$$

III. CALCUL DU MODELE

III.2 Algorithme des moindres carrés pondérés (4)

Formulation matricielle

$$Y = \begin{bmatrix} y(t_1) \\ \vdots \\ y(t_N) \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi^T(t_1) \\ \vdots \\ \varphi^T(t_N) \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} q(t_1) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & q(t_N) \end{bmatrix}$$

$$(Y - \Phi\theta) = \begin{bmatrix} y(t_1) - \varphi^T(t_1)\theta \\ \vdots \\ y(t_N) - \varphi^T(t_N)\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J(\theta) = (Y - \Phi\theta)^T Q (Y - \Phi\theta)$$

III. CALCUL DU MODELE

III.2 Algorithme des moindres carrés pondérés (5)

$$\begin{aligned} J(\theta) &= Y^T Q Y - Y^T Q \Phi - \theta^T \Phi^T Q Y + \theta^T \Phi^T Q \Phi \theta \\ &= [\theta - (\Phi^T Q \Phi)^{-1} \Phi^T Q Y]^T \Phi^T Q \Phi [\theta - (\Phi^T Q \Phi)^{-1} \Phi^T Q Y] \\ &\quad + Y^T Q Y - Y^T Q \Phi (\Phi^T Q \Phi)^{-1} \Phi^T Q Y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J(\theta) \text{ minimiser si } \theta = (\Phi^T Q \Phi)^{-1} \Phi^T Q Y = \hat{\theta}$$

Soit $E(\theta) = Y - \Phi \theta = Y - Y_m(\theta)$ Ecart entre système et modèle

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}) &= Y - \Phi \hat{\theta} \\ &= Y - \Phi (\Phi^T Q \Phi)^{-1} \Phi^T Q Y \\ &= [I - \Phi (\Phi^T Q \Phi)^{-1} \Phi^T Q] Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_m(\hat{\theta})^T Q E(\hat{\theta}) &= (\Phi \hat{\theta})^T Q E(\hat{\theta}) \\ &= Y^T Q \Phi (\Phi^T Q \Phi)^{-1} \Phi^T Q (I - \Phi (\Phi^T Q \Phi)^{-1} \Phi^T Q) Y \\ &= 0 \end{aligned}$$

III. CALCUL DU MODELE

III.2 Algorithme des moindres carrés pondérés (6)

3.2.2 Cas continu

$$J(\theta) = \int_{t_0}^{t_f} q(t) [y(t) - \varphi^T(t)\theta]^2 dt$$

$$\nabla(J(\theta)) = -2 \int_{t_0}^{t_f} q(t) (y(t) - \varphi^T(t)\theta) \varphi(t) dt$$

$$\nabla(J(\hat{\theta})) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_f} q(t) \varphi(t) \varphi^T(t) \hat{\theta} dt = \int_{t_0}^{t_f} q(t) \varphi(t) y(t) dt$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \left[\int_{t_0}^{t_f} q(t) \varphi(t) \varphi^T(t) dt \right]^{-1} \left[\int_{t_0}^{t_f} q(t) \varphi(t) y(t) dt \right]$$

$$\nabla(\nabla J(\theta))^T = 2 \int_{t_0}^{t_f} q(t) \varphi(t) \varphi^T(t) dt \geq 0$$

III. CALCUL DU MODELE

III.2 Algorithme des moindres carrés pondérés (7)

3.2.3 Applications

A. Régression linéaire

Modèle $y_m(t) = ax(t) + b$

Mesures N paires (x_k, y_k)

Critère $J(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k - (ax_k + b))^2$

Paramètres $\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

Régresseur $\varphi^T(k) = [x_k \quad 1]$

$$y_m(k) = ax_k + b = \varphi^T(k)\theta$$

III. CALCUL DU MODELE

III.2 Algorithme des moindres carrés pondérés (8)

Fonction de pondération uniforme

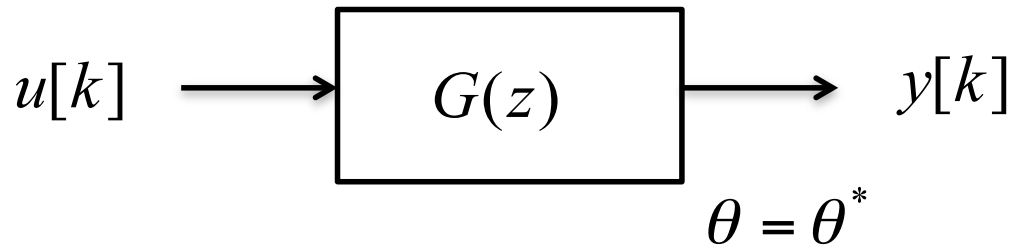
$$q(k) = \frac{1}{N}$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} &= \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) y(k) \right] \\ &= \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} x_k \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k & 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} x_k \\ 1 \end{bmatrix} y_k \right] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2 & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k y_k \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \end{bmatrix}\end{aligned}$$

III. CALCUL DU MODELE

III.2 Algorithme des moindres carrés pondérés (9)

B. Identification d'un système linéaire sans bruit



$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Modèle

$$y_m[k] = -a_1 y[k-1] - a_2 y[k-2] \dots - a_n y[k-n] \\ + b_1 u[k-1] + b_2 u[k-2] \dots + b_m u[k-m]$$

III. CALCUL DU MODELE

III.2 Algorithme des moindres carrés pondérés (10)

Mesures

N mesures $(u[k], y[k])$ $k = 1 \dots N$

Paramètres

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Régresseur

$$\varphi^T[k] = [-y[k-1] \quad -y[k-2] \quad \dots \quad -y[k-n] \quad u[k-1] \quad \dots \quad u[k-m]]$$

Critère

$$J(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=n+1}^N (y[k] - \underbrace{\varphi^T[k]\theta}_{y_m(k, \theta)})^2$$

III. CALCUL DU MODELE

III.2 Algorithme des moindres carrés pondérés (11)

$$Y = \begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n+2) \\ \vdots \\ y[N] \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi^T(n+1) \\ \varphi^T(n+2) \\ \vdots \\ \varphi^T[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y[n] & \dots & -y[1] & u[n] & \dots & u[n-m+1] \\ -y[n+1] & \dots & -y[2] & u[n+1] & \dots & u[n-m+2] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y[N-1] & \dots & -y[N-n] & u[N-1] & \dots & u[N-m] \end{bmatrix}$$

$$Y = \Phi \theta^* \quad (\text{absence de bruit})$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y = \theta^*$$


 Pondération uniforme

III. CALCUL DU MODELE

III.2 Algorithme des moindres carrés pondérés (12)

C. Identification d'un système linéaire avec bruit (modèle ARX)

Système $y[k] = \varphi^T [k]\theta^* + w[k]$

 Bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2

Régresseur

$$\varphi^T [k] = [-y[k-1] \quad \dots \quad -y[k-n_a] \quad u[k-n_r] \quad \dots \quad u[k-n_b-n_r+1]]$$

Paramètres

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n_a} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n_b} \end{bmatrix}$$

III. CALCUL DU MODELE

III.2 Algorithme des moindres carrés pondérés (13)

Modèle ARX

$$y_m(k, \theta) = \hat{y}[k, \theta] = \varphi^T[k] \theta$$

Critère $J(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=\max(n_a+1, n_r+n_b)=M}^N e^2[k, \theta]$

$$e[k, \theta] = y[k] - \varphi^T[k] \theta$$

Mesures N mesures $(u[k], y[k])$ $k = 1 \dots N$

III. CALCUL DU MODELE

III.2 Algorithme des moindres carrés pondérés (14)

$$Y = \begin{bmatrix} y[M] \\ \vdots \\ y[N] \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} w[M] \\ \vdots \\ w[N] \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi^T[M] \\ \vdots \\ \varphi^T[N] \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow Y = \Phi \theta^* + W$$

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} J(\theta) = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y = \theta^* + (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T W$$

$$\text{Si } E\{(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T W\} = E\{(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T\} E\{W\} = 0$$

$$\text{alors } E\{\hat{\theta}\} = E\{\theta^*\} = \theta^* \quad \text{Estimateur non biaisé}$$

$$\begin{aligned} \text{var}\{\hat{\theta}\} &= E\{(\hat{\theta} - \theta^*)(\hat{\theta} - \theta^*)^T\} \\ &= E\{(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T W W^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1}\} \\ &= \sigma^2 E\{(\Phi^T \Phi)^{-1}\} \end{aligned}$$

III. CALCUL DU MODELE

III.2 Algorithme des moindres carrés pondérés (15)

En général pour un système réel

Φ et W sont corrélés

$$\Rightarrow E\{\hat{\theta}\} \neq \theta^*$$

Estimateur biaisé