IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

–Forme standard

–Résolution graphique

–Définitions et théorèmes

–Algorithme du simplexe

–Dualité

–Approches non linéaires

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.1 Forme standard (1)

Minimiser $c^T x$

avec $Ax = b \quad x \geq 0$

$b \geq 0 \quad A \in \mathbf{R}^{mxn} \quad \text{rang } A = m \leq n$

Il est toujours possible de revenir à la forme standard !

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.1 Forme standard (2)

Transformations sous forme standard:

$\boxed{1° \quad \exists \quad b_i < 0}$ $\quad \Rightarrow \quad$ multiplier b_i et ligne A_i par -1

$\boxed{2° \quad \max \quad c^T x}$ $\quad \Leftrightarrow \quad \min \quad -c^T x$

$\boxed{3° \quad Ax \geq b}$ $\quad \Leftrightarrow \quad Ax\text{-}y = b \quad y \geq 0$

$\boxed{4° \quad Ax \leq b}$ $\quad \Leftrightarrow \quad Ax + y = b \quad y \geq 0$

$\boxed{5° \quad x_{\min} \leq x \leq x_{\max}}$ $\quad \Rightarrow \quad z = x - x_{\min} \geq 0$

$$z + y = x_{\max} - x_{\min} \quad y \geq 0$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.1 Forme standard (3)

Exemple : Allocation de ressources

	Produit A	Produit B	Disponibilité
Machine 1	10	5	2000
Machine 2	4	10	1500
Machine 3	1	2	500
Profit	10	20	

Objectif:
Maximiser le profit

$$\Leftrightarrow \max \quad 10x_1 + 20x_2 \qquad \text{avec} \quad \begin{aligned} &10x_1 + 5x_2 < 2000 \\ &4x_1 + 10x_2 < 1500 \\ &x_1 + 2x_2 < 500 \qquad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

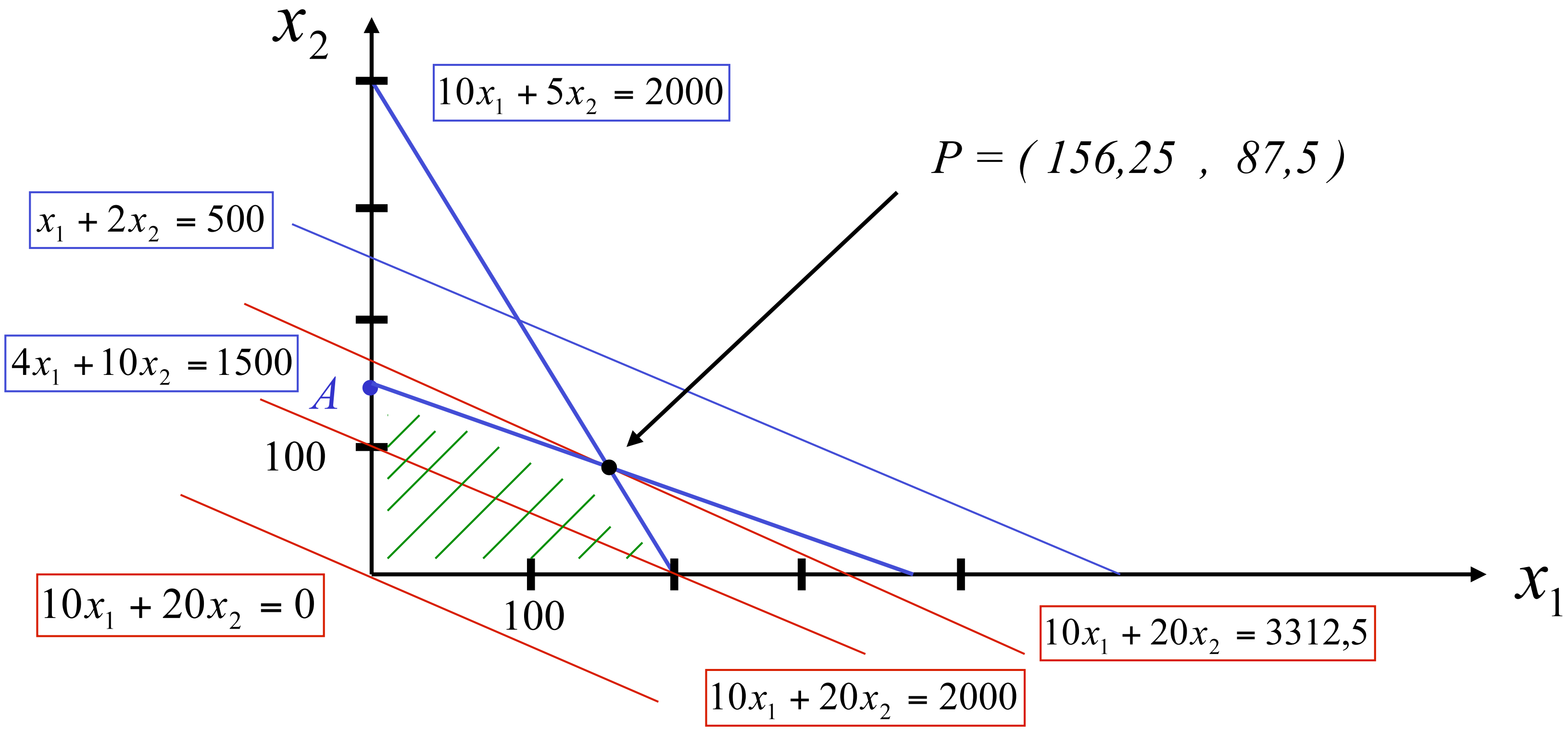
$$\Leftrightarrow \quad \min \quad -10x_1 - 20x_2 \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} &10x_1 + 5x_2 + x_3 = 2000 \\ &4x_1 + 10x_2 + x_4 = 1500 \\ &x_1 + 2x_2 + x_5 = 500 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.2 Résolution graphique (1)

Résolution d'un problème à 2 dimensions : (Exemple précédent)



Tracer $10x_1 + 20x_2 = k$ => l'optimum = P

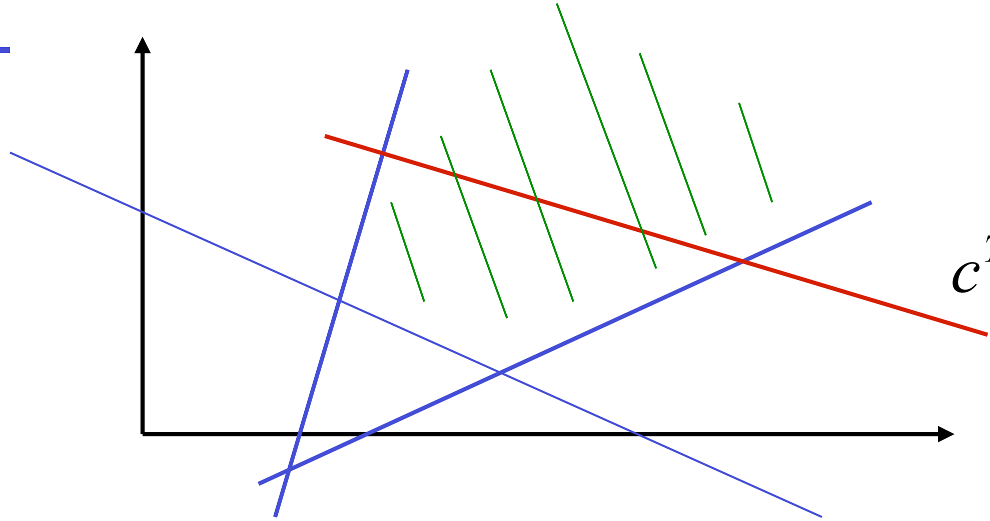
Si objectif = $8x_1 + 20x_2$ => infinité de solutions = segment (P, A)

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.2 Résolution graphique (2)

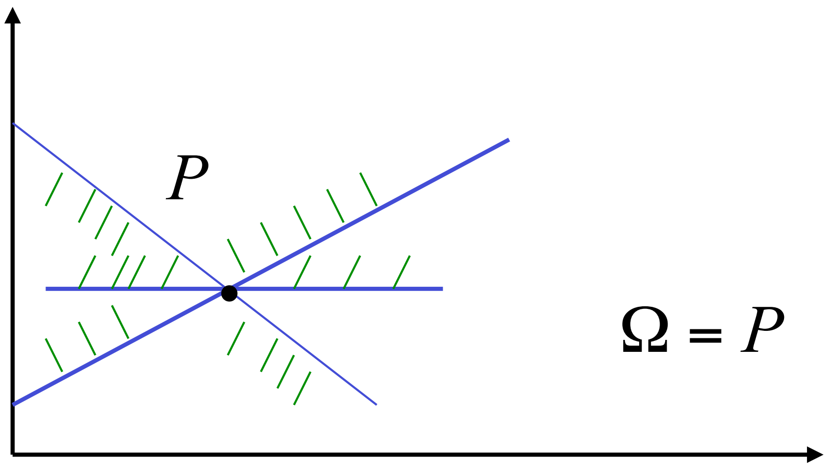
Solution à l'infini

Maximiser $c^T x$



$c^T x = k > 0$

Solution unique



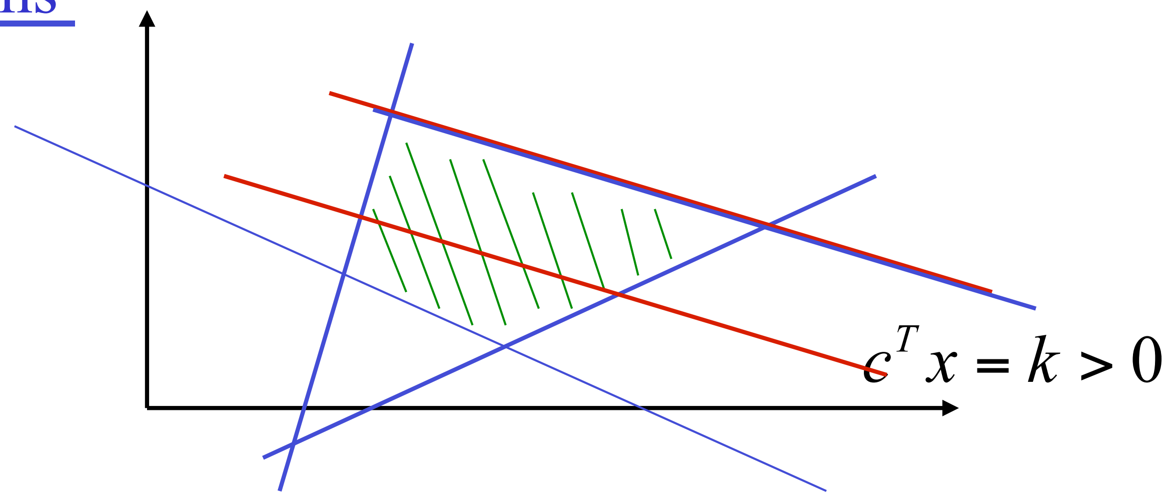
$\Omega = P$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

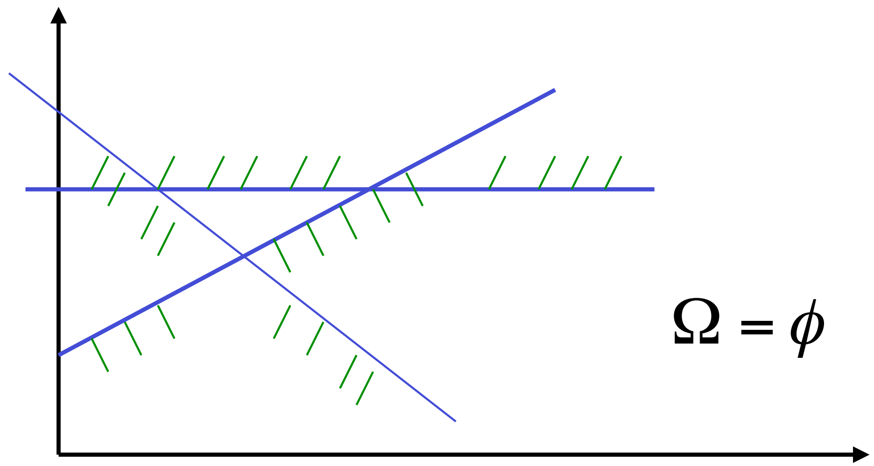
IV.2 Résolution graphique (3)

Infinité de solutions

Maximiser $c^T x$



Pas de solution



IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.3 Définitions et théorèmes (1)

Soit un problème standard:

$\min c^T x$

avec $\quad Ax = b \quad b \geq 0 \quad b \in \mathbf{R}^m \quad x \geq 0 \quad A \in \mathbf{R}^{mxn} \quad$ rang de $A = m \leq n$

IV.31 Définitions:

Soit $B = [a_1 \; a_2 \cdots a_m]$ = Base de A $\qquad$ (a_i linéairement indépendants)

Soit $\quad A = [B \; D] \quad B \in \mathbf{R}^{mxm} \quad$ rang $B = m \quad D \in \mathbf{R}^{mx(n-m)}$

si $\quad x_B \quad$ solution de $\quad Bx_B = b \quad \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix}$$ Solution de base de $Ax = b$

si $\quad x_B \geq 0 \quad$ => Solution de base admissible

si $\quad x_B > 0 \quad$ => Solution de base admissible non dégénérée

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.3 Définitions et théorèmes (2)

IV.32 Théorème fondamental I

i) Si $\exists$ une solution admissible alors $\exists$ une solution de base admissible

ii) Si $\exists$ une solution optimale alors $\exists$ une solution de base optimale

=> Chercher la solution parmi les solutions de base (au plus $\frac{n!}{m!(n-m)!}$)

IV.33 Convexité de l'ensemble admissible

L'ensemble $\{x \mid Ax = b \quad x \geq 0\}$ est convexe

Démonstration: Soient $x_1\ x_2 \left| \begin{array}{l} Ax_1 = b \quad x_1 \geq 0 \\ Ax_2 = b \quad x_2 \geq 0 \end{array} \right.$

$$x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \quad \lambda \in [0,1]$$

$$Ax_3 = \lambda A x_1 + (1-\lambda) A x_2 = b$$

$$x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq 0$$

cqfd

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.3 Définitions et théorèmes (3)

IV.34 Théorème fondamental II

Les solutions de base admissibles sont les sommets
de l'ensemble admissible

Corollaire

S'il existe une solution optimale, celle-ci est un des sommets
de l'ensemble admissible

=> Méthode du SIMPLEXE

Principe Evaluer la fonction aux sommets
de l'ensemble admissible

Les sommets sont obtenus en calculant
les solutions de base

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (1)

IV.41 Opérations élémentaires sur les lignes

$$A \rightarrow E\,A$$

1° Permutation de deux lignes

Permutation ligne 1 et 3

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2° Multiplication d'une ligne par un scalaire

Multiplication ligne 2

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3° Ajout d'une ligne multipliée par un scalaire à une autre ligne

Ajout de 2 x ligne 1 à la ligne 4

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (2)

IV.42 Inversion matricielle par opérations élémentaires sur les lignes

A inversible $\Leftrightarrow$ $\exists$ opérations élémentaires $E_p \cdots E_2\ E_1$
telles que $E_p \cdots E_2\ E_1\ A = I$

Algorithme

•Former matrice augmentée $[\,A \quad I\,]$

•Opérations élémentaires sur les lignes

$$E_p \cdots E_1 \left[A\ I\right] = \left[I\ B\right]$$

$$\Rightarrow B = E_p \cdots E_1 = A^{-1}$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (3)

IV.43 Calcul d'une solution de base

Soit $A \in \mathbf{R}^{\mathrm{mxn}}$ rang $A = m$

1° Former une matrice augmentée $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$

2° Appliquer des opérations élémentaires

$$E\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \tilde{D} & \tilde{b} \end{bmatrix} \qquad \tilde{D} \in \mathbf{R}^{mx(n-m)}$$

3° Soit $x \in \mathbf{R}^n \mid Ax = b$ avec $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_D \end{bmatrix}$ $x_B \in \mathbf{R}^m$

$$EAx = Eb \Leftrightarrow x_B + \tilde{D}x_D = \tilde{b} \Leftrightarrow x_B = \tilde{b} - \tilde{D}x_D$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} \tilde{b} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\tilde{D}x_D \\ x_D \end{bmatrix}$$

=> Solution de base $x = \begin{bmatrix} \tilde{b} \\ 0 \end{bmatrix}$ $x_D = 0$ pour la base $B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow E = B^{-1}$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (4)

IV.44 Changement de solution de base

$$[A\ b] \underset{\substack{\text{opérations}\\\text{élémentaires}}}{\longrightarrow} [I\ D\ \tilde{b}] = \left[\begin{array}{cccc} \underbrace{\begin{matrix}1\,0\cdots 0\\ 0\,1\cdots 0\\ \cdots \\ 0\,0\cdots 1\end{matrix}}_{\dim=m} & \underbrace{\begin{matrix} y_{1m+1} & \cdots & y_{1n} & \cdots & y_{10} \\ y_{2m+1} & & \cdots & & \\ & & & & \\ y_{mm+1} & \cdots & y_{mn} & \cdots & y_{m0}\end{matrix}}_{\dim=n-m+1} \end{array}\right]$$

Solution de base initiale:

$$x = \begin{bmatrix}\tilde{b}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{m0} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

pour la base $B = [a_1 \cdots a_m]$

avec

$$Ax = b \Leftrightarrow y_{10}a_1 + y_{20}a_2 + \cdots + y_{m0}a_m = b$$

$$B[I\ D] = A \Leftrightarrow y_{1j}a_1 + y_{2j}a_2 + \cdots + y_{mj}a_m = a_j \quad \forall m < j \leq n$$

Changement de base: remplacer a_p par a_q dans B

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (5)

IV.44 Changement de solution de base (suite)

Dans l'ancienne base: $$a_q = \sum_{i=1}^{m} y_{iq} a_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{m} y_{iq} a_i + y_{pq} a_p$$

Dans la nouvelle base: $$a_p = \frac{1}{y_{pq}} a_q - \sum_{\substack{i=1 \\ p \neq q}}^{m} \frac{y_{iq}}{y_{pq}} a_i \qquad \text{si} \quad y_{pq} \neq 0$$

Dans l'ancienne base: $$a_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} a_i$$

Dans la nouvelle base: $$a_j = \sum_{\substack{i=1 \\ p \neq q}}^{m} (y_{ij} - \frac{y_{iq}}{y_{pq}} y_{pj}) a_i + \frac{y_{pj}}{y_{pq}} a_q$$

=> Pivotage $$y_{ij} \rightarrow y_{ij} - \frac{y_{iq}}{y_{pq}} y_{pj} \quad i \neq p \quad \forall j \quad \text{et} \quad y_{pj \rightarrow} \frac{y_{pj}}{y_{pq}}$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (6)

IV.45 Principe de l'algorithme du Simplexe

Aller d'une solution de base admissible à une autre solution de base admissible jusqu'à ce que la solution optimale soit trouvée

Solution de base admissible ssi $x = \begin{bmatrix} \tilde{b} \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$

Soit la base $B = [a_1 \cdots a_m]$

et la solution de base admissible $x = \begin{bmatrix} \tilde{b} \\ 0 \end{bmatrix}$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (7)

A. Comment choisir a_p

Supposons a_q entre dans la base (avec $q>m$)

Dans l'ancienne base

$$a_q = y_{1q}a_1 + \cdots + y_{mq}a_m$$

$$y_{10}a_1 + y_{20}a_2 + \cdots + y_{m0}a_m = b$$

$$\Rightarrow (y_{10} - \alpha y_{1q})a_1 + (y_{20} - \alpha y_{2q})a_2 + \cdots + (y_{m0} - \alpha y_{mq})a_m + \alpha a_q = b$$

Si $p = \arg\min_i \dfrac{y_{i0}}{y_{iq}}$ $\quad y_{iq} > 0$ et si $\alpha = \dfrac{y_{p0}}{y_{pq}}$ alors $\begin{cases} y_{j0} - \alpha y_{jq} \geq 0 \\ y_{p0} - \alpha y_{pq} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ a_q remplace a_p dans la base

$\Rightarrow$ solution de base admissible

$$x = \begin{bmatrix} y_{10} - \alpha y_{1q} & \cdots & 0 \cdots & y_{m0} - \alpha y_{mq} & 0 \cdots \alpha \cdots 0 \end{bmatrix}^T \geq 0$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (8)

B. Comment choisir a_q

Soit $x = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b} \\ 0 \end{bmatrix}$ solution de base admissible

Fonction de coût $z = c^T x = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$

Fonction de coût initiale $z = \begin{bmatrix} c_B^T & c_D^T \end{bmatrix} x = c_B^T \tilde{b} = c_1 y_{10} + \cdots + c_m y_{m0} = z_0$

a_q rentre dans la base et a_p en sort

$$\Rightarrow p = \arg\min_i \frac{y_{i0}}{y_{iq}} \quad y_{iq} > 0 \qquad \alpha = \frac{y_{p0}}{y_{pq}}$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (9)

$$\Rightarrow (y_{10} - \alpha y_{1q})a_1 + (y_{20} - \alpha y_{2q})a_2 + \cdots + (y_{m0} - \alpha y_{mq})a_m + \alpha a_q = b$$

Fonction de coût

$$z = c_1(y_{10} - \alpha y_{1q}) + \cdots + c_m(y_{m0} - \alpha y_{mq}) + c_q\alpha$$

$$= z_0 + \alpha(c_q - (c_1 y_{1q} + \cdots + c_m y_{mq}))$$

$$= z_0 + \alpha(c_q - z_q)$$

si $z - z_0 < 0$ => la fonction de coût décroît

$\Leftrightarrow (c_q - z_q) < 0$

si $(c_q - z_q) = r_q \geq 0 \quad \forall q$ => l'optimum est atteint

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (10)

Algorithme

1° Former une matrice augmentée pour une solution admissible

2° Calculer $r_i = c_i - z_i^{(*)} \quad i = m+1,\ldots,n$

3° Si $r_i \geq 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow$ stop

4° Choisir $q \quad \middle| \; r_q = c_q - z_q < 0$

5° Si $\nexists \quad y_{iq} > 0 \quad \Rightarrow$ stop

sinon $\quad p = \arg\min\limits_{i} \dfrac{y_{0i}}{y_{iq}} \quad$ avec $\quad y_{iq} > 0$

6° Pivoter autour de l'élément (p,q)

7° Retour en 2°

(*) $z_i = c_1 y_{1i} + c_2 y_{2i} + \cdots + c_m y_{mi}$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (11)

Exemple

Soit le problème $\max \quad 2x_1 + 5x_2 \quad$ avec $\quad 0 \le x_1 \le 4$

$$0 \le x_2 \le 6$$

$$x_1 + x_2 \le 8$$

Forme standard

$$\min \quad -2x_1 - 5x_2 \quad \text{avec} \quad x_1 + x_3 = 4$$

$$x_2 + x_4 = 6$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 8$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \quad x_4 \ge 0 \quad x_5 \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (12)

Exemple (suite)

Matrice augmentée

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b
1	0	1	0	0	4
0	$\boxed{1}$	0	1	0	6
1	1	0	0	1	8

Base initiale

$$B = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix}$$

Solution de base initiale

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Fonction de coût initiale $z = c^T x = 0 = z_0$

Coefficients de coût relatif

$$r_1 = c_1 - z_1 = c_1 - (c_3 y_{11} + c_4 y_{21} + c_5 y_{31}) = -2$$

$$r_2 = c_2 - z_2 = c_2 - (c_3 y_{12} + c_4 y_{22} + c_5 y_{32}) = -5$$

=> a_2 entre dans la base *(q=2)*

$$p = \arg\min_i \frac{y_{i0}}{y_{iq}} \quad y_{iq} > 0 \Rightarrow p = 2$$

=> a_4 sort de la base => pivotage

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (13)

Exemple (suite)

Matrice après pivotage

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	6
$\boxed{1}$	0	0	-1	1	2

Nouvelle base

$$B = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_5 \end{bmatrix}$$

Nouvelle solution de base

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Fonction de coût $\quad z = c^T x = -30$

Coefficients de coût relatif

$$r_1 = c_1 - z_1 = c_1 - (c_3 y_{11} + c_2 y_{21} + c_5 y_{31}) = -2$$

$$r_4 = c_4 - z_4 = c_4 - (c_3 y_{14} + c_2 y_{24} + c_5 y_{34}) = 5$$

=> a_1 entre dans la base *(q=1)*

$$p = \arg\min_i \frac{y_{i0}}{y_{iq}} \quad y_{iq} > 0 \Rightarrow p = 3$$

=> a_5 sort de la base => pivotage

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (14)

Exemple (suite)

Matrice après pivotage

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b
0	0	1	1	-1	2
0	1	0	1	0	6
1	0	0	-1	1	2

Nouvelle base

$$B = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

Nouvelle solution de base

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fonction de coût $z = c^T x = -34$

Coefficients de coût relatif

$$r_4 = c_4 - z_4 = c_4 - (c_3 y_{14} + c_2 y_{24} + c_1 y_{34}) = 3$$

$$r_5 = c_5 - z_5 = c_5 - (c_3 y_{15} + c_2 y_{25} + c_1 y_{35}) = 2$$

=> l'optimum est atteint: $x_1^* = 2$, $x_2^* = 6$ et $2x_1^* + 5x_2^* = 34$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (15)

IV.46 Forme matricielle de l'algorithme du simplexe

Problème: $\min c^T x \quad \text{avec} \quad Ax = b \quad x \geq 0$

soit $B = [a_1 \cdots a_m]$ la base de A

$D = [a_{m+1} \cdots a_n]$ les colonnes hors base de $A = [B \quad D]$

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_D \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} c_B^T & c_D^T \end{bmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\min c_B^T x_B + c_D^T x_D = \begin{bmatrix} c_B^T & c_D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_D \end{bmatrix}$$

$$\text{avec} \quad Ax = \begin{bmatrix} B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_D \end{bmatrix} = Bx_B + Dx_D = b \quad x_B \geq 0 \quad x_D \geq 0$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (16)

IV.46 Forme matricielle de l'algorithme du simplexe (suite)

A. si $x_D = 0 \Rightarrow$ sommet $x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow z_0 = c^T x = c_B^T x_B = c_B^T B^{-1} b$$

B. si $x_D \neq 0 \Rightarrow x_B = B^{-1}(b - Dx_D)$

$$\Rightarrow z = c_B^T x_B + c_D^T x_D = c_B^T B^{-1} b + (c_D^T - c_B^T B^{-1} D) x_D$$

soit $r_D^T = c_D^T - c_B^T B^{-1} D$

$$\Rightarrow z = z_0 + r_D^T x_D$$

si $r_D \geq 0 \Rightarrow B^{-1}b$ est optimal $\Rightarrow x^* = B^{-1}b$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (17)

Tableau canonique du simplexe

$$\begin{bmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & D & b \\ c_B^T & c_D^T & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & B^{-1}D & B^{-1}b \\ c_B^T & c_D^T & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -c_B^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & B^{-1}D & B^{-1}b \\ c_B^T & c_D^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & B^{-1}D & \overbrace{B^{-1}b}^{\boxed{x_B}} \\ 0 & \underbrace{c_D^T - c_B^T B^{-1}D}_{\boxed{r_D^T}} & \underbrace{-c_B^T B^{-1}b}_{\boxed{-z_0}} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ par opérations élémentaires

et pivotage $\Rightarrow r_D^T \geq 0 \Rightarrow$ arrêt

$$\Rightarrow x_B^* = B^{-1}b$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (18)

Exemple

Soit le problème

$$\min \quad -10x_1 - 20x_2 \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} & 10x_1 + 5x_2 + x_3 = 2000 \\ & 4x_1 + 10x_2 + x_4 = 1500 \\ & x_1 + 2x_2 + x_5 = 500 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2000 \\ 1500 \\ 500 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} -10 & -20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (19)

Exemple (suite)

Tableau

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & b \\ \hline & 10 & 5 & 1 & 0 & 0 & 2000 \\ & 4 & \boxed{10} & 0 & 1 & 0 & 1500 \\ & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 500 \\ c^T & -10 & -20 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{array}$$

$-z_0$ Fonction de coût initiale

Base initiale $B = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix}$

Solution de base initiale $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2000 \\ 1500 \\ 500 \end{bmatrix}$

=> a_2 entre dans la base *(q=2)*

$p = \arg\min\limits_i \dfrac{y_{i0}}{y_{iq}} \quad y_{iq} > 0 \Rightarrow p = 2$ => a_4 sort de la base => pivotage

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (20)

Exemple (suite)

Tableau

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & b \\
\hline
 & \boxed{8} & 0 & 1 & -0{,}5 & 0 & 1250 \\
 & 0{,}4 & 1 & 0 & 0{,}1 & 0 & 150 \\
 & 0{,}2 & 0 & 0 & -0{,}2 & 1 & 200 \\
c^T & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & \boxed{3000}
\end{array}
$$

$-z$ Fonction de coût

Base courante $B = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_5 \end{bmatrix}$

Solution de base $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \\ 1250 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix}$

=> a_1 entre dans la base *(q=1)*

$p = \arg\min_i \dfrac{y_{i0}}{y_{iq}} \quad y_{iq} > 0 \Rightarrow p = 1$ => a_3 sort de la base => pivotage

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (21)

Exemple (suite)

Tableau

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b
	1	0	0,125	$-0{,}0625$	0	156,25
	0	1	$-0{,}05$	0,125	0	87,5
	0	0	$-0{,}025$	$-0{,}1875$	1	168,75
c^T	0	0	0,25	1,875	0	$\boxed{3312{,}5}$

$$-z^* = -c^T x^*$$

Base courante

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_5 \end{bmatrix}$$

Solution de base

$$x = \begin{bmatrix} 156{,}25 \\ 87{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 168{,}75 \end{bmatrix}$$

=> l'optimum est atteint

$$x_1^* = 156{,}25 \qquad x_2^* = 87{,}5$$

$$\Rightarrow 10x_1^* + 20x_2^* = 3312{,}5$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (22)

IV.47 Initialisation de la méthode du simplexe

L'algorithme suppose que l'on démarre depuis un sommet initial

Facile dans certains cas :

$$\min c^T x \quad \text{avec} \quad Ax \leq b \quad x \geq 0 \quad b > 0$$

$$\Leftrightarrow \min c^T x \quad \text{avec} \quad Ax + y = b \quad x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad y \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b \Rightarrow \text{sommet initial} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

Méthode d'initialisation $\quad \min c^T x \;\text{ avec }\; Ax = b$

Définir le problème associé:

$$\min \mathrm{y}_1 + y_2 + \cdots + y_m \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} A & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{sommet initial} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

Solution : $y = 0$

Cette solution est telle que $Ax = b$

=> initialisation du simplexe

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (23)

Exemple

Soit le problème $\quad \min \quad 2x_1 + 3x_2 \quad$ avec $\quad 4x_1 + 2x_2 \geq 12$

$$x_1 + 4x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Forme standard $\quad \min \quad 2x_1 + 3x_2 \quad$ avec $\quad 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 12$

$$x_1 + 4x_2 - x_4 = 6$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix} \quad c^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Initialisation $\quad \min \quad x_5 + x_6 \quad$ avec $\quad \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} x = b$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0 \quad x_6 \geq 0$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (24)

Exemple (suite)

Tableau du problème associé

Base initiale $B = \begin{bmatrix} a_5 & a_6 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c|ccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & b \\ \hline & 4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ & 1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 6 \\ c_I^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Solution de base initiale

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & b \\ \hline 4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & \boxed{4} & 0 & -1 & 0 & 1 & 6 \\ -5 & -6 & 1 & 1 & 0 & 0 & -18 \end{array}$$

=> a_2 entre dans la base *(q=2)*

$$p = \arg\min_i \frac{y_{i0}}{y_{iq}} \quad y_{iq} > 0 \Rightarrow p = 2$$

=> a_6 sort de la base

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (25)

Exemple (suite)

Base courante $B = \begin{bmatrix} a_5 & a_2 \end{bmatrix}$

Tableau du problème associé

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
$\boxed{3{,}5}$	0	-1	0,5	1	$-0{,}5$	9
0,25	1	0	$-0{,}25$	0	0,25	1,5
$-3{,}5$	0	1	$-0{,}5$	0	1,5	-9

Solution de base courante $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$

=> a_1 entre dans la base $(q=1)$

$$p = \arg\min_i \frac{y_{i0}}{y_{iq}} \quad y_{iq} > 0 \Rightarrow p = 1$$

=> a_5 sort de la base

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (26)

Exemple (suite)

Tableau du problème associé

Base courante $B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
1	0	$-2/7$	$1/7$	$2/7$	$-1/7$	$18/7$
0	1	$1/14$	$-2/7$	$-1/14$	$2/7$	$6/7$
0	0	0	0	1	1	0

Solution $x^* = \begin{bmatrix} 18/7 \\ 6/7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Tableau du problème à résoudre

	a_1	a_2	a_3	a_4	b
	1	0	$-2/7$	$1/7$	$18/7$
	0	1	$1/14$	$-2/7$	$6/7$
c^T	2	3	0	0	0

Solution de base initiale $x = \begin{bmatrix} 18/7 \\ 6/7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.4 Algorithme du simplexe (27)

Exemple (suite)

Base courante $B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$

Tableau du problème à résoudre

a_1	a_2	a_3	a_4	b
1	0	$-2/7$	$1/7$	$18/7$
0	1	$1/14$	$-2/7$	$6/7$
0	0	$5/14$	$4/7$	$-54/7$

Solution $x = \begin{bmatrix} 18/7 \\ 6/7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

=> l'optimum est atteint

$$x_1^* = 18/7$$
$$x_2^* = 6/7$$

$$\Rightarrow 2x_1^* + 3x_2^* = 54/7$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.5 Dualité (1)

IV.51 Définitions

A. Problème primal : $\min c^T x \quad \text{avec} \quad Ax \geq b \quad x \geq 0$

=> Problème dual $\max \lambda^T b \quad \text{avec} \quad \lambda^T A \leq c^T \quad \lambda \geq 0 \quad \Leftrightarrow A^T \lambda \leq c$

B. Problème primal :

$$\min c^T x \quad \text{avec} \quad Ax = b \quad x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} Ax \geq b \\ Ax \leq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$$

=> Problème dual $\max \begin{bmatrix} u^T & v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} = (u-v)^T b$

$$\text{avec} \begin{bmatrix} u^T & v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \leq c^T \Leftrightarrow (u-v)^T A \leq c^T \quad u \geq 0 \;\; v \geq 0$$

soit $\lambda = u - v$

$$\Leftrightarrow \max \lambda^T b \quad \text{avec} \; \lambda^T A \leq c^T$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.5 Dualité (2)

IV.52 Propriétés du problème dual

Lemme x et λ solutions admissibles du problème primal et dual => $c^T x \geq \lambda^T b$

Théorème de la dualité

$$\exists \quad x^* \quad \text{optimal} \quad \Rightarrow \quad \exists \quad \lambda^* \quad \text{optimal} \quad \text{et} \quad c^T x^* = \lambda^{*T} b$$

Théorème de complémentarité

Les solutions d'une paire de problèmes duaux sont optimales ssi

$$(c^T - \lambda^T A)x = 0$$

$$\lambda^T (Ax - b) = 0$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.6 Algorithme de Karmarkar (1)

Algorithme du simplexe avec une variable de dimension n
Peut nécessiter 2^n-1 étapes => Complexité exponentielle

Algorithme de Karmarkar => Complexité polynomiale
On part de l'intérieur pour se diriger vers un sommet :

Algorithme du point intérieur

Forme canonique de Karmarkar

$$\min c^T x \quad \text{avec} \quad Ax = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad \Leftrightarrow e^T x = 1 \quad e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x \in Ker\{A\} \cap \Delta \quad \text{avec simplexe } \Delta = \{x \mid e^T x = 1\}$$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

IV.6 Algorithme de Karmarkar (2)

•Mise en forme du problème standard

•Recherche d'un point admissible δ_0

•Algorithme : succession de projections orthogonales et de déplacements à l'intérieur