V. PROGRAMMATION NON LINEAIRE

–Problèmes avec contraintes d'égalités - Multiplicateurs de Lagrange

–Problèmes avec contraintes d'inégalité – Conditions de Karush-Kuhn-Tucker

–Méthode des pénalités

–Programmation quadratique séquentielle

V. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

V.1 Multiplicateurs de Lagrange (1)

Problèmes avec contraintes d'égalité

$$\min f(x) \quad \text{avec} \quad h(x) = 0$$

$$x \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}} \quad f : \mathbf{R}^{\mathbf{n}} \to \mathbf{R} \quad h : \mathbf{R}^{\mathbf{n}} \to \mathbf{R}^{\mathbf{m}} \quad m \leq n$$

V.111 Points réguliers

Soit la matrice Jacobienne *J(x)* de dimension $m \times n$

$$J(x) = \begin{bmatrix} \nabla h_1(x)^T \\ \vdots \\ \nabla h_m(x)^T \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad J^T(x) = \nabla h^T(x)$$

Un point *x** tel que *h(x*)=0* est appelé un point régulier des contraintes si

$$\text{rang } J(x^*) = m$$

V. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

V.1 Multiplicateurs de Lagrange (2)

V.111 Points réguliers (suite)

Les contraintes d'égalité *h(x)=0* décrivent une surface dans $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$

$$S = \left\{ x \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}} \middle| h(x) = 0 \right\}$$

Si les points de S sont réguliers alors S est de dimension *(n-m)*

V.112 Courbe sur une surface

Une courbe C sur la surface S est un ensemble de points $\{x(t) \in S\}$ continûment paramétré par $t \in \mathbf{R}$

La courbe C passe par un point x^* s'il existe t^* tel que $x(t^*)=x^*$

Le vecteur $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=t^*}$ est la tangente à la courbe C au point x^*

Propriété

$$J(x^*) \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t^*} = 0$$

V. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

V.1 Multiplicateurs de Lagrange (3)

V.113 Espace tangent

L'espace tangent *T(x*)* en un point *x** sur la surface *S* est définit comme l'ensemble $T(x^*) = \left\{ y \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}} \,\middle|\, J(x^*)y = 0 \right\}$

Si *x** est régulier alors *T(x*)* est de dimension *(n-m)*

Soit une courbe *C* sur la surface *S* passant par *x** alors la tangente à la courbe $\dfrac{dx}{dt\big|_{t=t^*}} \in T(x^*)$

V.114 Espace normal

L'espace normal *N(x*)* en un point *x** sur la surface *S* est définit comme l'ensemble $N(x^*) = \left\{ y \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}} \,\middle|\, y = J^T(x^*)z \quad \text{avec} \quad z \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}} \right\}$

Si *x** est régulier alors *N(x*)* est de dimension *m*

Propriété $T(x^*) \perp N(x^*) \quad \Leftrightarrow \quad \forall u \in T(x^*) \quad \forall v \in N(x^*) \quad u^T v = 0$

V. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

V.1 Multiplicateurs de Lagrange (4)

V.12 Condition nécessaire du premier ordre

Soit $f(x)$ minimum en x^* sous la contrainte $h(x) = 0$

Si x^* est un point régulier, alors

$$\boxed{\exists \lambda^* \in \mathbf{R^m} \;\middle|\; \nabla f(x^*) + \nabla h^T(x^*)\lambda^* = 0}$$

Condition nécessaire mais pas suffisante

V.1 Multiplicateurs de Lagrange (5)

Démonstration

Soit une courbe $x(t) \,\big|\, h(x(t)) = 0 \quad \forall t$

$\Rightarrow \exists\, t^* \,\big|\, x(t^*) = x^*$

$f(x(t))$ minimum en $t = t^*$

$$\Rightarrow \left.\frac{df(x(t))}{dt}\right|_{t=t^*} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f^T(x^*) \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t^*} = 0$$

$\Rightarrow \nabla f^T(x^*) \in N(x^*)$

$\nabla h^T(x^*) =$ base de l'espace normal $N(x^*)$

$\Rightarrow \nabla f(x^*) =$ combinaison linéaire des colonnes de $\nabla h^T(x^*)$

$\Leftrightarrow \exists \lambda^* \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}} \,\big|\, \nabla f(x^*) = -\nabla h^T(x^*)\lambda^*$

V.1 Multiplicateurs de Lagrange (6)

Exemple

$$\min \; f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{avec} \quad h(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \quad \nabla h(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \nabla h^T(x^*)\lambda^* = 0 \\ h(x^*) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x_1^* + \lambda^* x_1^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^* = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^* = -1$$

$$x_2^* + 2\lambda^* x_2^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2^* = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^* = -\tfrac{1}{2}$$

$$(x_1^*)^2 + 2(x_2^*)^2 - 1 = 0$$

V.1 Multiplicateurs de Lagrange (7)

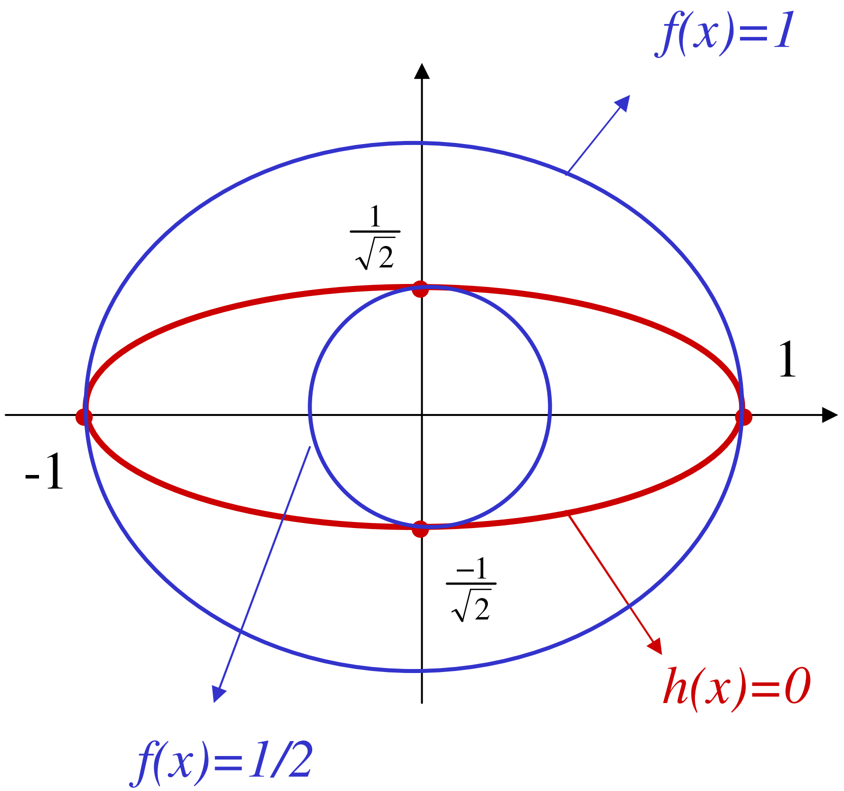
Exemple (suite)

$\Leftrightarrow$

$$x_1^* = 0 \quad \text{et} \quad x_2^* = \pm \tfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \lambda^* = -\tfrac{1}{2}$$

ou bien

$$x_2^* = 0 \quad \text{et} \quad x_1^* = \pm 1 \quad \text{et} \quad \lambda^* = -1$$

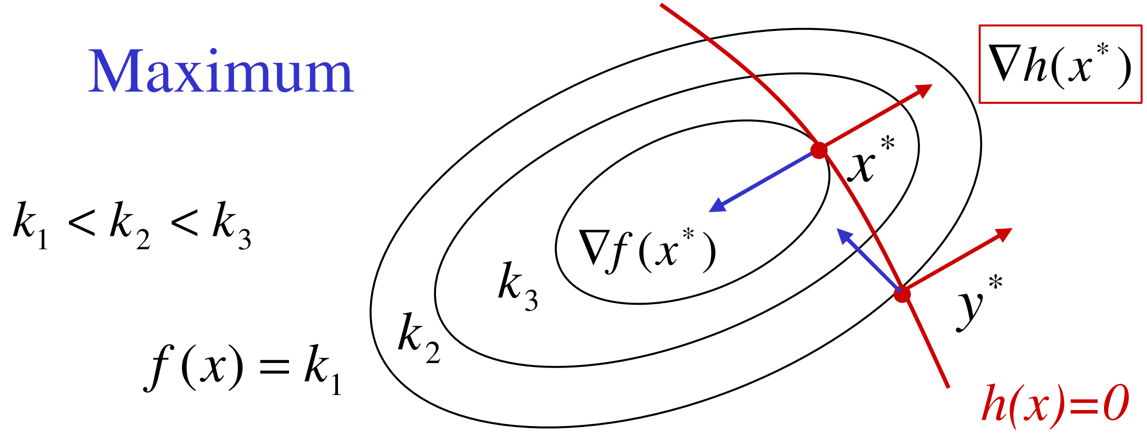


$$\Rightarrow 2 \text{ minima en } \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\text{et } 2 \text{ maxima en } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

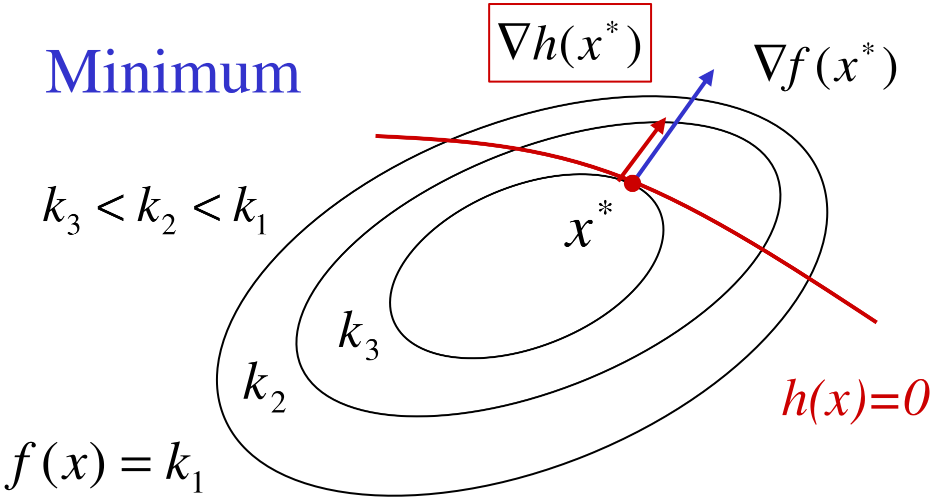
V.1 Multiplicateurs de Lagrange (8)

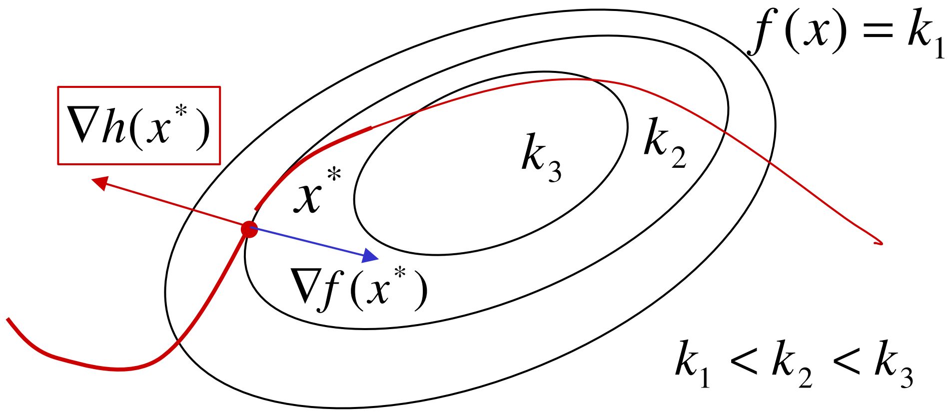
Maximum



Condition vérifiée en x^* et pas en y^*

Minimum





Pas un extremum

V. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

V.1 Multiplicateurs de Lagrange (9)

V.13 Conditions nécessaires et suffisantes

Soit $l(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T h(x)$ Fonction de Lagrange

Soit $L(x,\lambda)$ le Hessien de $l(x,\lambda)$

$$\Rightarrow L(x,\lambda) = \nabla(\nabla^T f(x)) + \lambda_1 H_1(x) + \cdots + \lambda_m H_m(x)$$

$$= H(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i H_i(x)$$

Hessien de $f(x)$ Hessien de $h_i(x)$

Condition nécessaire du second ordre

Soit $f(x)$ minimum en x^* sous la contrainte $h(x) = 0$

Si x^* est un point régulier, alors

$$\boxed{\exists \lambda^* \,\Big|\, \begin{array}{l} 1° \; \nabla l(x^*,\lambda^*) = \nabla f(x^*) + \nabla h^T(x^*)\lambda^* = 0 \quad \text{et} \quad h(x^*) = 0 \\ 2° \; y^T L(x^*,\lambda^*) y \geq 0 \quad \forall y \in T(x^*) \Leftrightarrow \forall y \,\big|\, y^T \nabla h^T(x^*) = 0 \end{array}}$$

V. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

V.1 Multiplicateurs de Lagrange (10)

Conditions suffisante

$$\text{si} \quad \exists x^* \quad \exists \lambda^* \Big| \quad 1° \;\; \nabla f(x^*) + \nabla h^T(x^*)\lambda^* = 0 \quad \text{et} \quad h(x^*) = 0$$

$$2° \;\; y^T L(x^*, \lambda^*) y > 0 \quad \forall y \neq 0 \Big| \; y^T \nabla h^T(x^*) = 0$$

$$< 0$$

$\Rightarrow x^*$ est un minimum local au sens strict de *f(x)* avec *h(x)=0*

maximum

V. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

V.1 Multiplicateurs de Lagrange (11)

Exemple

$$\min \; f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{avec} \quad h(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \quad \nabla h(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix} \quad L(x,\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$1° \quad \begin{cases} \nabla f(x^*) + \nabla h^T(x^*)\lambda^* = 0 \\ h(x^*) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x_1^* + \lambda^* x_1^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^* = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^* = -1$$

$$x_2^* + 2\lambda^* x_2^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2^* = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^* = -\tfrac{1}{2}$$

$$(x_1^*)^2 + 2(x_2^*)^2 - 1 = 0$$

V. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

V.1 Multiplicateurs de Lagrange (12)

Exemple (suite)

$$\Leftrightarrow x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda^* = -\tfrac{1}{2} \quad \text{ou bien} \quad x^* = \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda^* = -1$$

$$2° \quad L(x^*, \lambda^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si} \;\; \lambda^* = -\tfrac{1}{2} \quad \text{ou bien} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{si} \;\; \lambda^* = -1$$

$$\nabla h^T(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{si} \;\; \lambda^* = -\tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y^T \nabla h^T(x^*) = 0 \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla h^T(x^*) = \begin{bmatrix} \pm 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{si} \;\; \lambda^* = -1 \quad \Rightarrow \quad y^T \nabla h^T(x^*) = 0 \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow y^T L(x^*, \lambda^*) y \quad = y_1^2 > 0 \;\; \text{si} \; \lambda^* = -\tfrac{1}{2} \;\; \text{ou bien} = -2y_2^2 < 0 \;\; \text{si} \; \lambda^* = -1$$

$$\Rightarrow 2 \text{ minima en } \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ et } 2 \text{ maxima en } \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

V. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

V.2 Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (1)

Problèmes avec contraintes d'inégalité

$$\min f(x) \quad \text{avec} \quad h(x) = 0 \quad c(x) \leq 0$$

Contrainte actives-inactives

Une contrainte d'inégalité $c_i(x) \leq 0$ est active en x si $c_i(x) = 0$
Elle est inactive si $c_i(x) < 0$

Point régulier

Un point x^* satisfaisant les contraintes $h(x^*)=0$ et $c_j(x^*) = 0$ $\forall j \in I(x^*)$ l'ensemble des indices des contraintes actives est appelé un point régulier si les vecteurs $\nabla h_i(x^*)$ $\nabla c_j(x^*)$ $j \in I(x^*)$ sont linéairement indépendants

V.2 Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (2)

V.21 Condition nécessaire du premier ordre

Soit x^* qui minimise $f(x)$ sous les contraintes $h(x) = 0$ et $c(x) \leq 0$

$(c(x) \geq 0)$

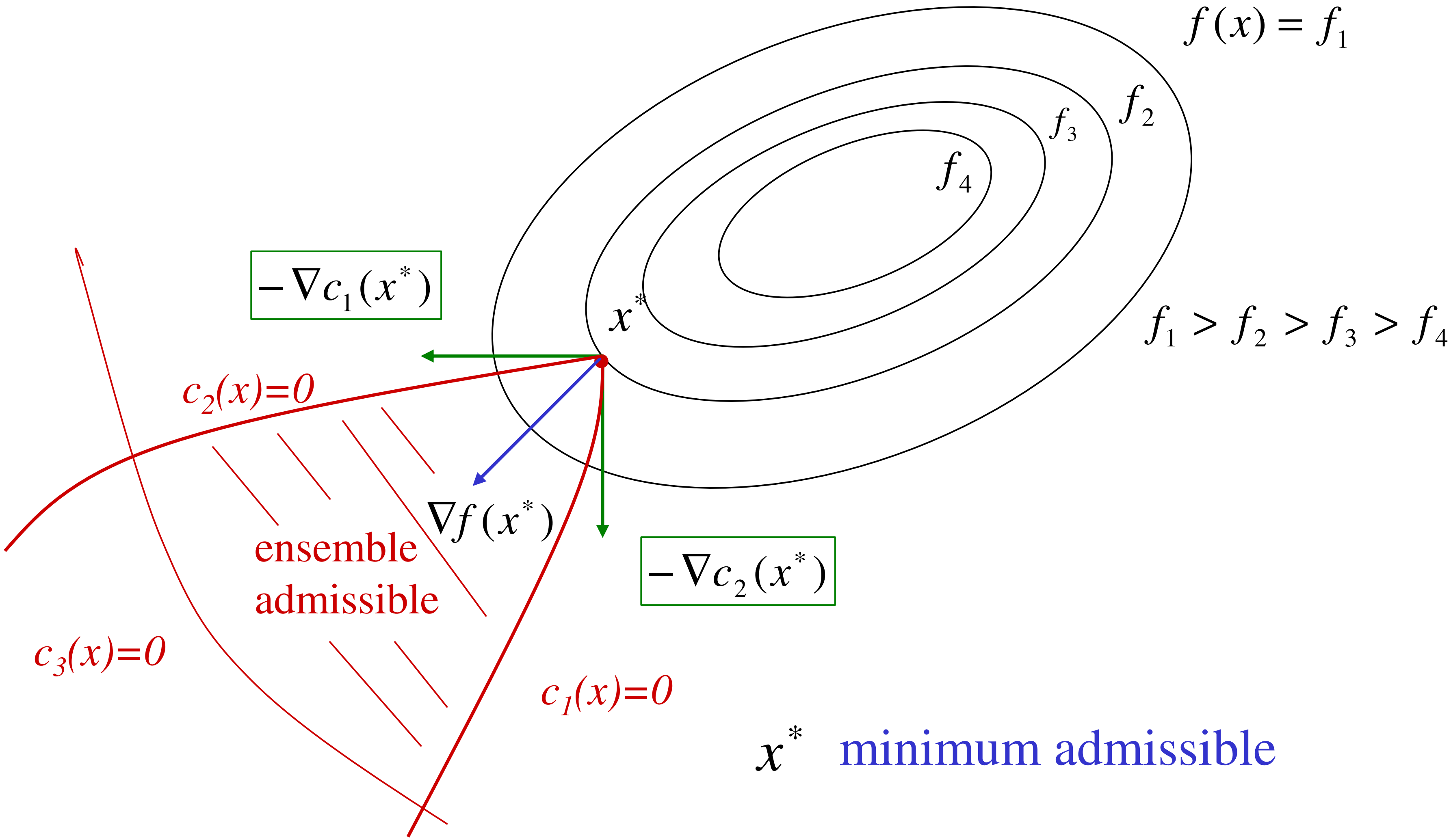
Si x^* est un point régulier, alors

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists \lambda^*, \mu^* \,\big| \\ \quad 1° \mu^* \geq 0 \quad (\mu^* \leq 0) \\ \quad 2° \nabla f(x^*) + \nabla h^T(x^*)\lambda^* + \nabla c^T(x^*)\mu^* = 0 \\ \quad 3° \mu^{*T} c(x^*) = 0 \end{array}}$$

$\Rightarrow \mu_i^* = 0 \quad \text{si} \quad c_i(x^*) < 0$ contrainte inactive

V. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

V.2 Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (3)



V. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

V.2 Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (4)

V.22 Conditions nécessaires et suffisantes

Hessien de $c_j(x)$

Soit $L(x,\lambda,\mu) = H(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i H_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j C_j(x)$

Hessien de $f(x)$

Hessien de $h_i(x)$

Condition nécessaire du second ordre

Soit x^* qui minimise $f(x)$ sous les contraintes $h(x) = 0$ et $c(x) \leq 0$ $(c(x) \geq 0)$

Si x^* est un point régulier, alors

$\exists\, \lambda^*, \mu^* \,|$

1° $\mu^* \geq 0$ $\quad (\mu^* \leq 0)$

2° $\nabla f(x^*) + \nabla h^T(x^*)\lambda^* + \nabla c^T(x^*)\mu^* = 0$

3° $\mu^{*T} c(x^*) = 0$

4° $y^T L(x^*,\lambda^*,\mu^*) y \geq 0 \quad \forall y \neq 0 \,\Big|\, \begin{cases} y^T \nabla h^T(x^*) = 0 \\ y^T \nabla c_j(x^*) = 0 \quad \forall j \in I(x^*) \end{cases}$

V.2 Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (5)

Condition suffisante

si $\exists\, \lambda^*, \mu^* \,|$

1° $\mu^* \geq 0$ $\quad (\mu^* \leq 0)$

2° $\nabla f(x^*) + \nabla h^T(x^*)\lambda^* + \nabla c^T(x^*)\mu^* = 0$ et $h(x^*) = 0 \quad c(x^*) \leq 0$

$(c(x) \geq 0)$

3° $\mu^{*T} c(x^*) = 0$

4° $y^T L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y > 0 \quad \forall y \neq 0 \,\Big|\, \begin{cases} y^T \nabla h^T(x^*) = 0 \\ y^T \nabla c_j(x^*) = 0 \quad \forall j \in I(x^*) \end{cases}$

$<$

contraintes actives

$\Rightarrow x^*$

est un minimum local au sens strict de $f(x)$ avec $h(x) = 0$ et $c(x) \leq 0$

maximum

V.2 Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (6)

Exemple

$$\min \; f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2 - 2$$

$$\text{avec} \quad h(x) = x_2 - x_1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad c(x) = x_1 + x_2 - 4 \leq 0$$

$$l(x,\lambda,\mu) = (x_1 - 1)^2 + x_2 - 2 + \lambda(x_2 - x_1 - 1) + \mu(x_1 + x_2 - 4)$$

$$\nabla l(x,\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L(x,\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

KKT

1° $\mu^* \geq 0$

2° $2(x_1^* - 1) - \lambda^* + \mu^* = 0$

$1 + \lambda^* + \mu^* = 0$

$x_2^* - x_1^* - 1 = 0$

$x_1^* + x_2^* - 4 \leq 0$

V. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

V.2 Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (7)

Exemple (suite)

A. Contrainte active:

1° $\mu^* > 0$

2° $2(x_1^* - 1) - \lambda^* + \mu^* = 0$

$1 + \lambda^* + \mu^* = 0$

$x_2^* - x_1^* - 1 = 0$

$x_1^* + x_2^* - 4 = 0$

$\Rightarrow x_1^* = \frac{3}{2} \quad x_2^* = \frac{5}{2} \qquad \lambda^* = 1 \quad \mu^* = -2$ => impossible

V. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

V.2 Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (8)

Exemple (suite)

B. Contrainte inactive:

1° $\mu^* = 0$

2° $2(x_1^* - 1) - \lambda^* = 0$

$1 + \lambda^* = 0$

$x_2^* - x_1^* - 1 = 0$

$\Rightarrow x_1^* = \frac{1}{2} \quad x_2^* = \frac{3}{2} \qquad \lambda^* = -1 \qquad c(x^*) = x_1^* + x_2^* - 4 = -2 < 0$

4° $\nabla h^T(x^*) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y^T \nabla h^T(x^*) = 0 \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow y^T L(x^*, \lambda,^* \mu^*) y = 2y_1^2 > 0 \quad \forall y \neq 0 \quad \Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ Minimum local au sens strict

V. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

V.3 Méthode des pénalités (1)

Soit le problème d'optimisation

$$\min f(x) \quad \text{avec} \quad c(x) \leq 0$$

Ce problème est transformé en un problème d'optimisation sans contrainte:

$$\min \; g(x, \alpha_k) = f(x) + \alpha_k \sum_{i=1}^{p} P_i(c_i(x))$$

fonctions de pénalité

Avec :

1° $P(c(x))$ continu

2° $P(c(x)) \geq 0 \quad \forall x$

3° $\alpha_k > 0$

=> *Problème d'optimisation sans contrainte*

V.3 Méthode des pénalités (2)

V.31 Méthode des pénalités intérieures

$c(x) \leq 0$ => ensemble admissible

Les pénalités sont proches de zéro loin des contraintes et tendent vers l'infini aux limites des contraintes:

Par exemple:

1° $P(x) = \dfrac{-1}{c(x)}$

avec x dans l'espace admissible

2° $P(x) = \dfrac{1}{c(x)^2}$

3° $P(x) = \ln(1 - \dfrac{1}{c(x)})$

V.3 Méthode des pénalités (3)

V.31 Méthode des pénalités intérieures (suite)

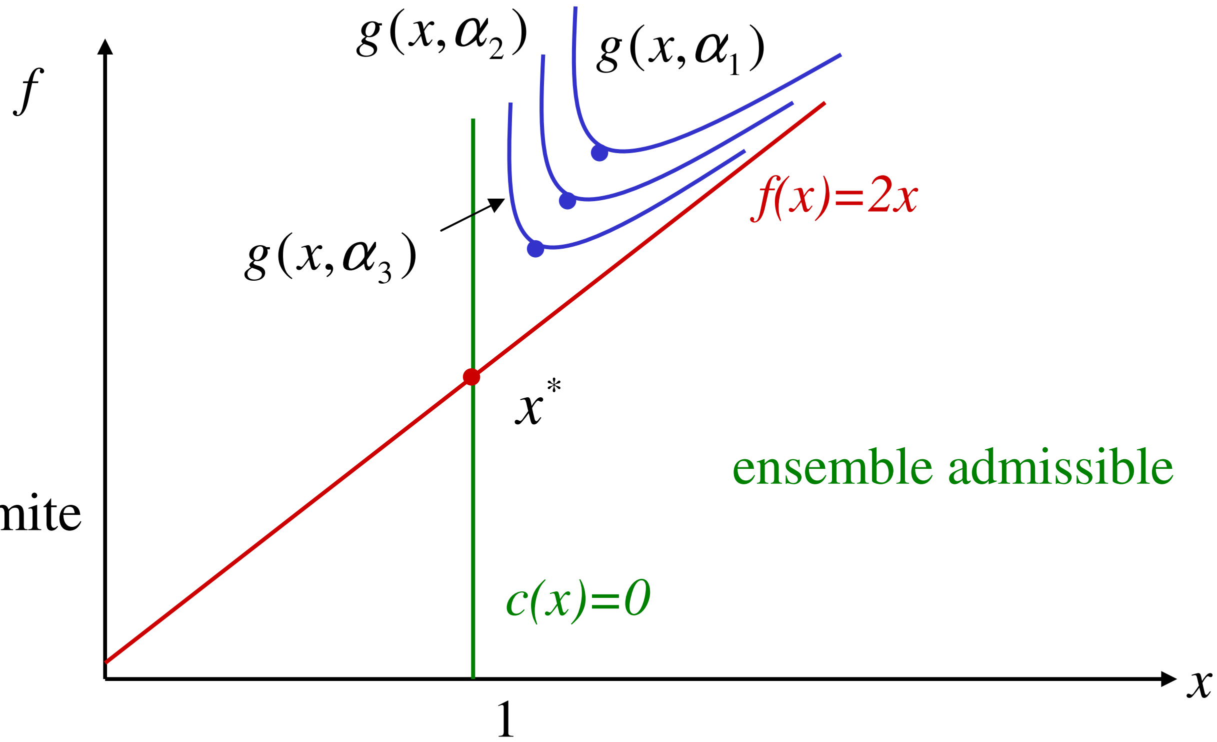
Exemple $\quad f(x) = 2x \quad c(x) = 1 - x \leq 0$

$$P(x) = \frac{-1}{c(x)} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow g(x, \alpha_k) = 2x + \alpha_k \frac{1}{x-1}$$

$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$

$\alpha_{k+1} = c_\alpha \alpha_k \quad 0 < c_\alpha < 1$

$\Rightarrow$ extrapolation à la limite



V. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES NON LINEAIRES

V.3 Méthode des pénalités (4)

V.32 Méthode des pénalités extérieures

$c(x) \leq 0$ => ensemble admissible

Les pénalités sont nulles dans l'espace admissible et positives quand les contraintes ne sont plus satisfaites:

Par exemple:

$$1° \quad P(c(x)) = \begin{cases} c(x)^q & \text{si } c(x) > 0 \\ 0 & \text{si } c(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$= \max(c(x),0)^q$$

$$2° \quad P(c(x)) = \begin{cases} a^{c(x)} - 1 & \text{si } c(x) > 0 \\ 0 & \text{si } c(x) \leq 0 \end{cases}$$

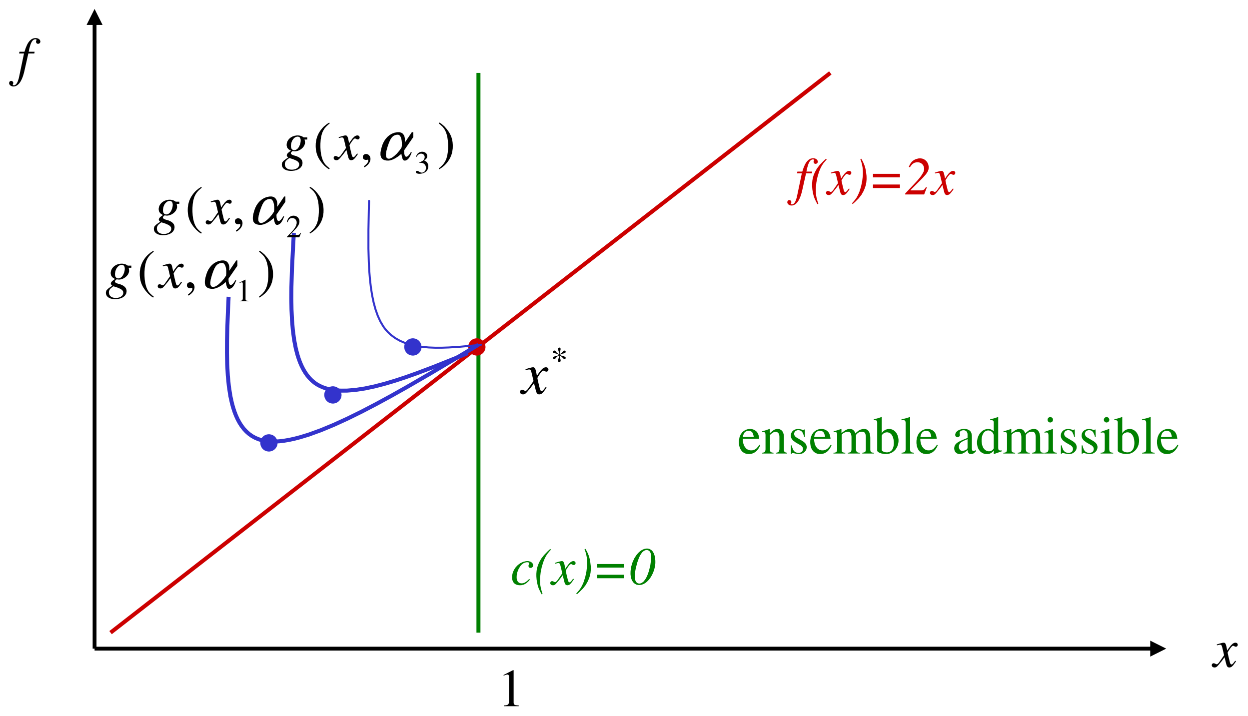
V.3 Méthode des pénalités (5)

V.32 Méthode des pénalités extérieures (suite)

Exemple $f(x) = 2x \quad c(x) = 1 - x \leq 0$

$$P(x) = \max(1 - x, 0)^2 \quad g(x, \alpha_k) = 2x + \alpha_k \max(1 - x, 0)^2$$

$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$



V.4 Programmation quadratique séquentielle (SQP)

$$\min f(x) \quad \text{avec} \quad h(x) = 0$$

Fonction de Lagrange :

$$l(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x)$$

$$\Rightarrow \nabla l = 0 = \nabla f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x)$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow F(y^*) = \begin{bmatrix} \nabla l \\ h \end{bmatrix} = 0$$

⇒Solution par la méthode de Newton

⇒Direction de recherche

⇒Minimisation du pas dans cette direction

⇒Mise à jour de l'estimée du Hessien