Télécom Physique Strasbourg
Master IRIV

Optimisation et programmation mathématique

Professeur Michel de Mathelin

Cours intégré : 20 h

Programme du cours d'optimisation

- Introduction
- Chapitre I: Rappels mathématiques
  - Positivité
  - Convexité
  - Minimum
  - Gradient et Hessien
  - Conditions nécessaires pour un minimum
  - Conditions suffisantes pour un minimum
- Chapitre II: Optimisation sans contraintes – Méthodes locales
  - Méthodes de recherche unidimensionnelle
  - Méthodes du gradient
  - Méthodes des directions conjuguées
  - Méthode de Newton et méthode de Levenberg-Marquardt
  - Méthodes quasi-Newton
  - Méthodes sans calcul du gradient
  - Résolution d'équations non linéaires

Programme du cours d'optimisation (suite)

- Chapitre III: Optimisation sans contraintes – Méthodes globales
  - Méthodes de recherche aléatoire
  - Algorithme du recuit simulé
  - Algorithmes génétiques
- Chapitre IV: Optimisation avec contraintes linéaires
  - Programmation linéaire
  - Méthode du simplexe
  - Méthodes du point intérieur
- Chapitre V: Optimisation avec contraintes non-linéaires
  - Multiplicateurs de Lagrange
  - Conditions de Karush-Kuhn-Tucker
  - Méthode des pénalités
  - Programmation quadratique séquentielle
  - Autres méthodes

Bibliographie – ouvrages d'optimisation

- E. Aarts & J. Korst, Simulated annealing and Boltzmann machines : A stochastic approach to combinatorial optimization and neural computing.
  John Wiley & Sons, New-York, 1997.
- D. Bertsekas, Nonlinear programming.
  Athena Scientific, Belmont, MA, 1999.
- M. Bierlaire, Introduction à l'optimisation différentiable.
  Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2006.
- F. Bonnans, Optimisation continue : cours et problèmes corrigés.
  Dunod, Paris, 2006.
- F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemaréchal et C. Sagastizàbal, Optimisation numérique : aspects théoriques et pratiques.
  Springer, Berlin, 1997.
- P. G. Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.
  Masson, Paris, 1994.
- E. Chong et S. Zak, An introduction to optimisation.
  John Wiley & Sons, New-York, 1995.

Bibliographie – ouvrages d'optimisation (suite)

- Y. Colette et P. Siarry, Optimisation multiobjectif.
  Eyrolles, Paris, 2002.
- J. C. Culioli, Introduction à l'optimisation.
  Ellipses, Paris, 1994.
- J. Dennis & R. Schnabel, Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations.
  Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- R. Fletcher, Practical methods of optimization.
  John Wiley & Sons, New-York, 1987.
- P. Gill, W. Murray, & M. Wright, Practical optimization.
  Academic Press, New-York, 1987.
- Y. Nesterov & A. Nemirovskii, Interior-point polynomial algorithms.
  SIAM studies in applied mathematics, vol. 13, Philadelphia, PA, 1994.
- S. Rao, Engineering optimization: theory and practice.
  John Wiley & Sons, New-York, 1996.
- T. Coleman, M. A. Branch, & A. Grace, Optimization toolbox for use with MATLAB: User's guide.
  The Mathworks Inc., Natick, 1999.

Bibliographie – ouvrages d'algèbre et de calcul matriciel

- A. Bjork, Numerical methods for least-squares problems.

  SIAM, Philadelphia, PA, 1996.
- G. Golub & C. Van Loan, Matrix computations.

  The John Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.
- R. Horn & C. Johnson, Matrix analysis.

  Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- W. Press et al., Numerical recipes in C, the art of scientific computing.

  Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- G. Strang, Linear algebra and its applications.

  Harcourt Brace Jovanovich, Orlando, FL, 1988.

INTRODUCTION

A Définition d'un problème d'optimisation

- Minimiser la fonction $f(x)$ avec $x \in \mathbf{R}^n$

  sous les contraintes
  $c_i(x) = 0 \quad i = 1, \cdots m$ (contraintes d'égalité)
  $d_j(x) \geq 0 \quad j = 1, \cdots p$ (contraintes d'inégalité)

  f(x) est appelée fonction de coût, fonction objectif, ou critère d'optimisation

$$\Leftrightarrow$$

- Minimiser $f(x)$ avec $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$

  où Ω est l'ensemble admissible :

$$\Omega = \left\{ x \,\middle|\, c_i(x) = 0,\ i = 1, \cdots, m \quad \text{et} \quad d_j(x) \leq 0,\ j = 1, \cdots, p \right\}$$

INTRODUCTION

B Classification des problèmes d'optimisation (1)

- B.1 Suivant les propriétés de la fonction de coût:
  - Fonction d'une seule variable
  - Fonction linéaire
  - Somme de carrés de fonctions linéaires
  - Fonction quadratique
  - Fonction convexe
  - Somme de carrés de fonctions non linéaires
  - Fonction non linéaire continûment dérivable
  - Fonction non linéaire non dérivable

B Classification des problèmes d'optimisation (2)

- B.2 Suivant les propriétés des contraintes:
  - Pas de contraintes
  - Simples bornes
  - Fonctions linéaires
  - Fonctions convexes
  - Fonctions non linéaires continûment dérivables
  - Fonctions non linéaires non dérivables

INTRODUCTION

C Terminologie

- C.1 Programmation linéaire:

$$f(x) = \mathbf{c}^{\mathbf{T}} x$$

$$\Omega = \left\{ x \,\middle|\, \mathbf{A}_1 x \le \mathbf{b}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_2 x = \mathbf{b}_2 \right\}$$

- C.2 Programmation quadratique:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^{\mathbf{T}} \mathbf{A} x - \mathbf{b}^{\mathbf{T}} x \qquad\qquad \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} > 0$$

$$\Omega = \left\{ x \,\middle|\, \mathbf{C}_1 x \le \mathbf{d}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_2 x = \mathbf{d}_2 \right\}$$

- C.3 Programmation convexe :

$f(x)$ est une fonction convexe

Ω est un ensemble convexe

- C.4 Programmation non linéaire

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.1 Définie positivité (1)

- I.1.1 Matrice définie positive

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} > 0 \qquad \text{ssi} \qquad x^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\,x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

- I.1.2 Propriétés des matrices définies positives

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} > 0 \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

1. $\lambda_i\{\mathbf{A}\} > 0 \qquad i = 1, \cdots, n$

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.1 Définie positivité (2)

2. $\det\{\mathbf{A_k}\} > 0 \qquad k = 1, \cdots, n$

$$\mathbf{A_1} = a_{11} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \mathbf{A}_n = \mathbf{A}$$

3. $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{\mathbf{T}}\mathbf{L}$ par factorisation de Cholesky avec $\mathbf{L}$ inversible et triangulaire

- I.1.3 Matrices semi-définies positives

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \geq 0 \qquad \text{ssi} \qquad x^{\mathbf{T}}\mathbf{A}x \geq 0 \quad \forall x$$

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.2 Convexité (1)

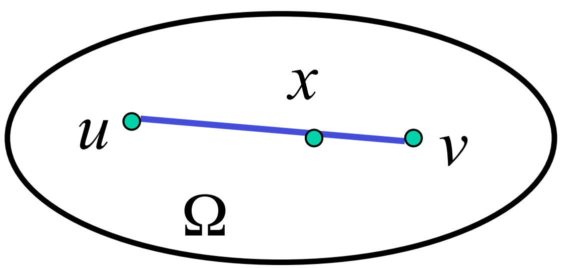
I.2.1 Ensemble convexe

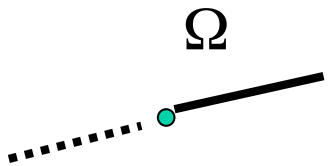
$\Omega \subset \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ est convexe

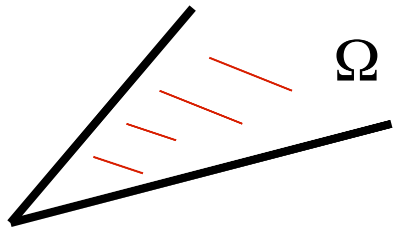
ssi $x = \alpha\, u + (1-\alpha)v \in \Omega \quad \forall u, v \in \Omega$ et $\alpha \in [0,1]$

Exemples:

Ensembles convexes



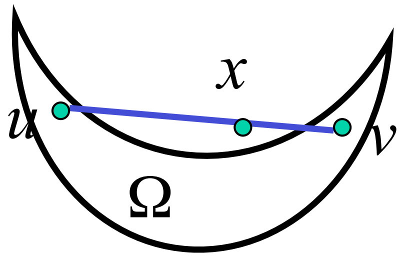


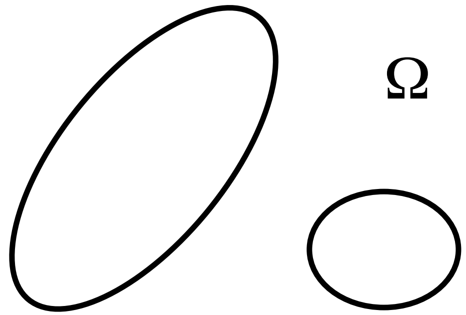


I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.2 Convexité (2)

Ensembles non convexes





I.2.2 Propriétés des ensembles convexes

Si Ω est convexe et $\alpha \in \mathbf{R}$

alors $\Psi = \left\{ x \mid x = \alpha\, u, u \in \Omega \right\}$ est convexe

Si Ω_1 et Ω_2 sont convexes

alors $\Psi = \Omega_1 \cap \Omega_2$ est convexe et

$$\Psi = \left\{ x \mid x = u_1 + u_2,\ u_1 \in \Omega_1 \text{ et } u_2 \in \Omega_2 \right\} \text{est convexe}$$

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.2 Convexité (3)

I.2.3 Polytope et polyèdre convexe

Soit $x \in \mathbf{R}^n$

L'ensemble des x tels que $a^T x = b \quad a \in \mathbf{R}^n$ définit un hyperplan

Cet hyperplan à (n-1) dimensions divise l'espace $\mathbf{R}^n$ en deux demi-espaces:

$$H^+ = \{x \mid a^T x \geq b\}$$

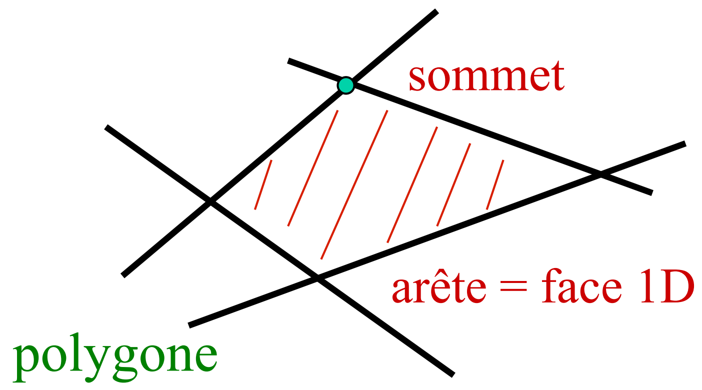
$$H^- = \{x \mid a^T x \leq b\}$$

H^+ et H^- sont convexes

L'intersection d'un nombre fini de demi espaces est un polytope convexe

Un polytope borné = polyèdre

Un polyèdre à 2 dimensions = polygone



I. RAPPELS MATHEMATIQUES

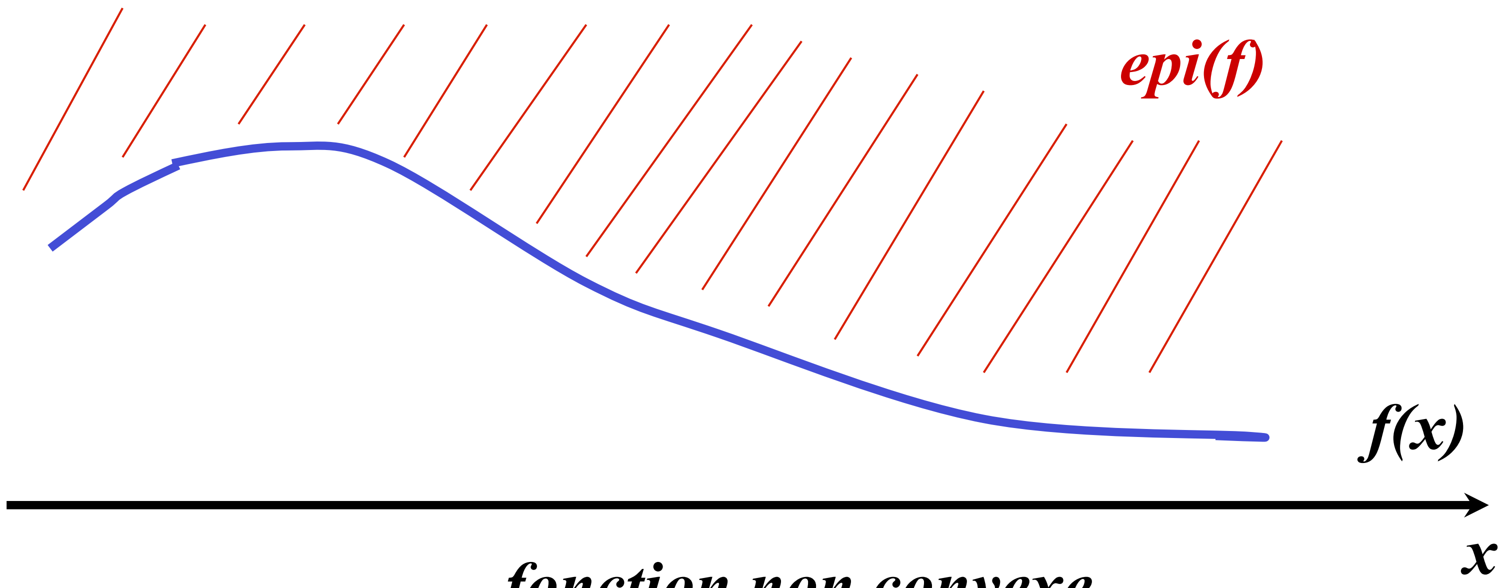
I.2 Convexité (4)

I.2.4 Fonction convexe

Définition I

$f : \Omega \to \mathbf{R} \quad \Omega \subset \mathbf{R}^n$ est convexe sur Ω

si son épigraphe est un ensemble convexe



fonction non convexe

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

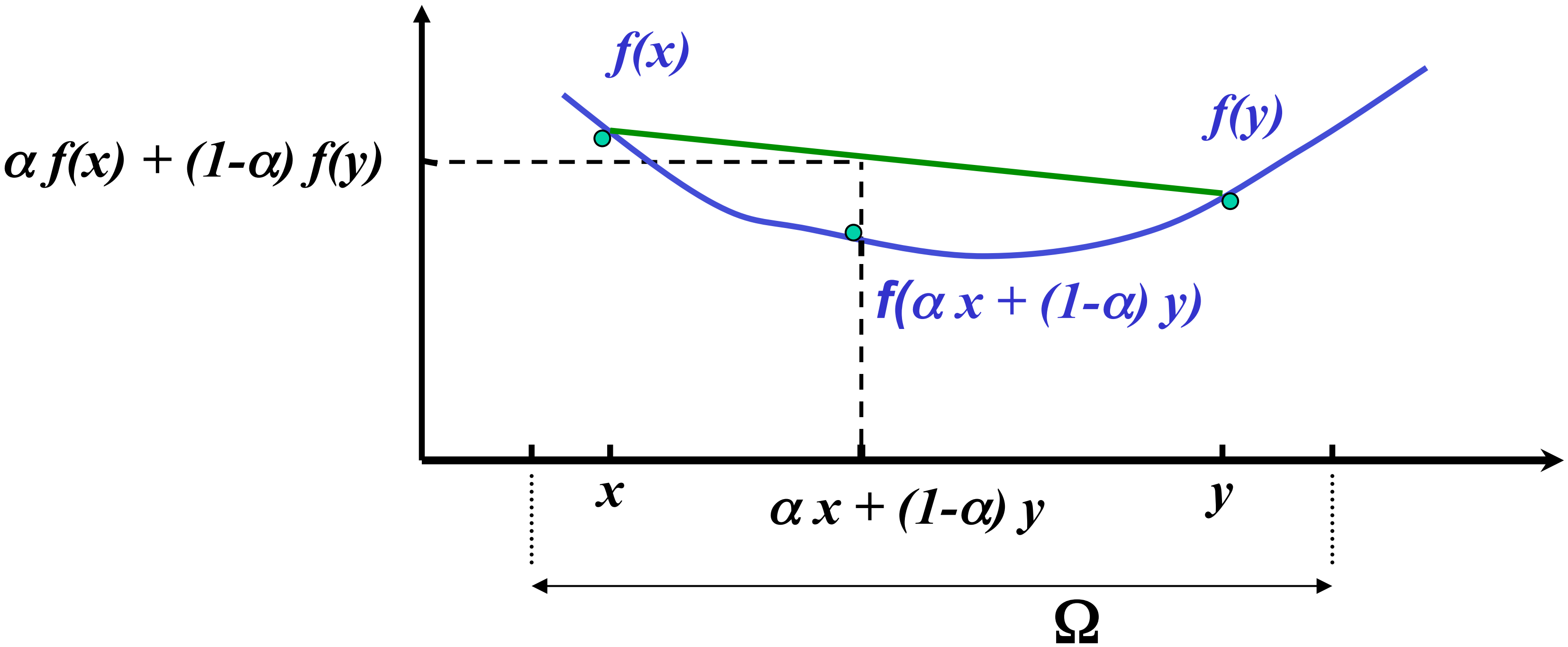
I.2 Convexité (5)

Définition II

$f : \Omega \to \mathbf{R} \quad \Omega \subset \mathbf{R}^n$ convexe ssi

$\forall\, x, y \in \Omega \qquad \forall\, \alpha \in [0,1]$

$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$



I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.3 Minimum d'une fonction (1)

I.3.1 Minimum local

$$f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \qquad \Omega \subset \mathbf{R}^n$$

f admet un minimum local en $x^* \in \Omega$

ssi $\exists\ \mathbf{B}(x^*, \varepsilon) = \left\{ x \,\middle|\, \|x - x^*\| < \varepsilon \right\}$

tel que $f(x) \geq f(x^*) \quad \forall\, x \in \mathbf{B}(x^*, \varepsilon)$

I.3.2 Minimum local au sens strict

$$f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \qquad \Omega \subset \mathbf{R}^n$$

f a un minimum local au sens strict en $x^* \in \Omega$

ssi $\exists\ \mathbf{B}(x^*, \varepsilon)$

tel que $f(x) > f(x^*) \ \forall\, x \in \mathbf{B}(x^*, \varepsilon) \ x \neq x^*$

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

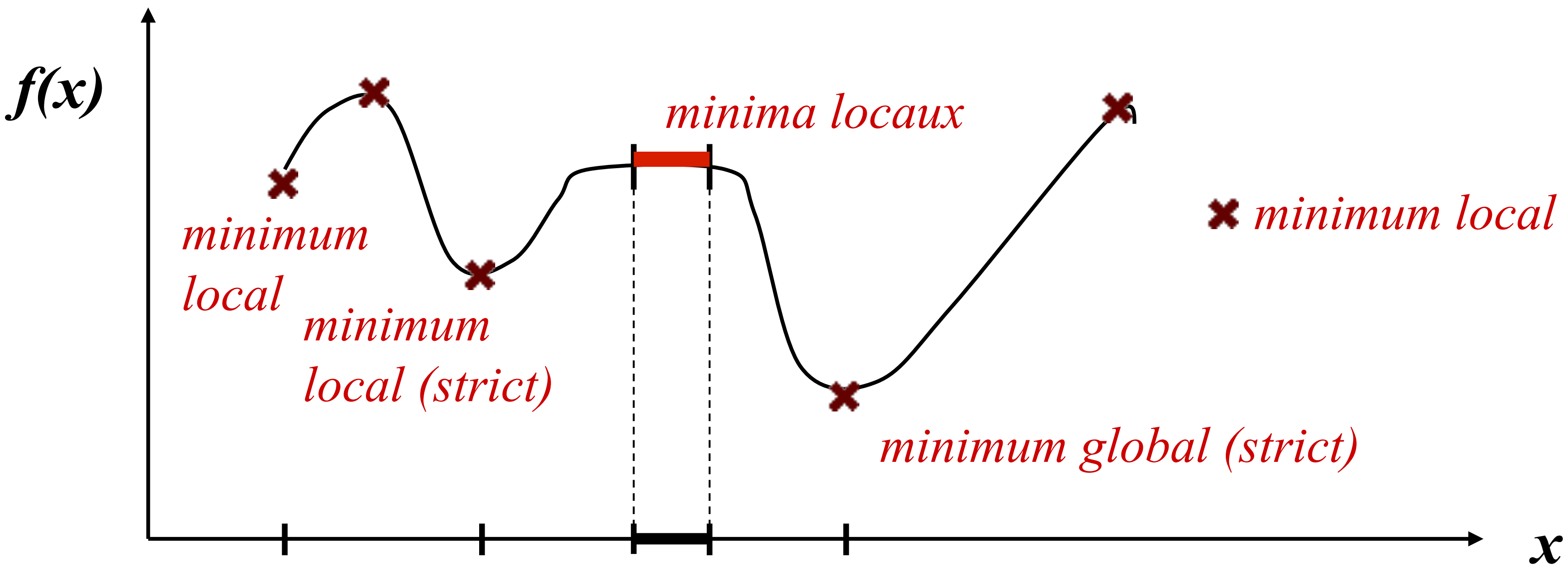
I.3 Minimum d'une fonction (2)

I.3.3 Minimum global

$$f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \qquad \Omega \subset \mathbf{R}^n$$

f a un minimum global en $x^* \in \Omega$

ssi $f(x) \geq f(x^*) \quad \forall\, x \in \Omega$



I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.3 Minimum d'une fonction (3)

I.3.4 Minima des fonctions convexes

Soit une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \quad \Omega \subset \mathbf{R}^n$

si f est convexe sur Ω alors tout minimum local (au sens strict) est un minimum global (au sens strict)

Démonstration

Soit $y = x + z \in \Omega$ et x minimum local

$$\Rightarrow f(x+\alpha z) = f(x+\alpha(y-x)) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \text{ si } \alpha \in [0,1]$$

$$\Rightarrow f(x+\alpha z) - f(x) \leq \alpha (f(y) - f(x))$$

(convexité de *f*)

$$\Rightarrow \exists \alpha_0 > 0 \,|\, f(x+\alpha_0 z) - f(x) \geq 0$$

(*x* minimum local)

$$\Rightarrow f(y) \geq f(x) \quad \forall\, y \in \Omega$$

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.4 Gradient et Hessien (1)

I.4.1 Gradient

$$f : \mathbf{R}^{\mathbf{n}} \to \mathbf{R} \qquad \nabla f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

I.4.2. Hessien

$$f : \mathbf{R}^{\mathbf{n}} \to \mathbf{R} \qquad \mathbf{H}(x) = \nabla\left(\nabla^{\mathbf{T}} f\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n} \end{bmatrix}$$

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.4 Gradient et Hessien (2)

I.4.3 Dérivée directionnelle

$f : \mathbf{R}^{\mathbf{n}} \to \mathbf{R}$ dérivée directionnelle de f dans la direction d au point x

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hd) - f(x)}{h}$$

$$= \frac{d}{dh} f(x+hd)\Big|_{h=0}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x+hd)\Big|_{h=0} d_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x+hd)\Big|_{h=0} d_n$$

$$= \nabla^{\mathbf{T}} f(x) d$$

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.4 Gradient et Hessien (3)

Si $\|d\| = 1$

la dérivée directionnelle est le taux d'accroissement de f dans la direction d au point x

⇨ Le taux d'accroissement est maximal dans la direction du gradient

⇨ Le gradient indique la direction de plus grande pente

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.4 Gradient et Hessien (4)

I.4.4 Contours d'une fonction

$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

- $y = f(x)$ définit une surface dans $\mathbf{R}^{n+1}$

- $f(x) = c$, avec c constant

définissent des courbes de niveau ou des contours de cette surface

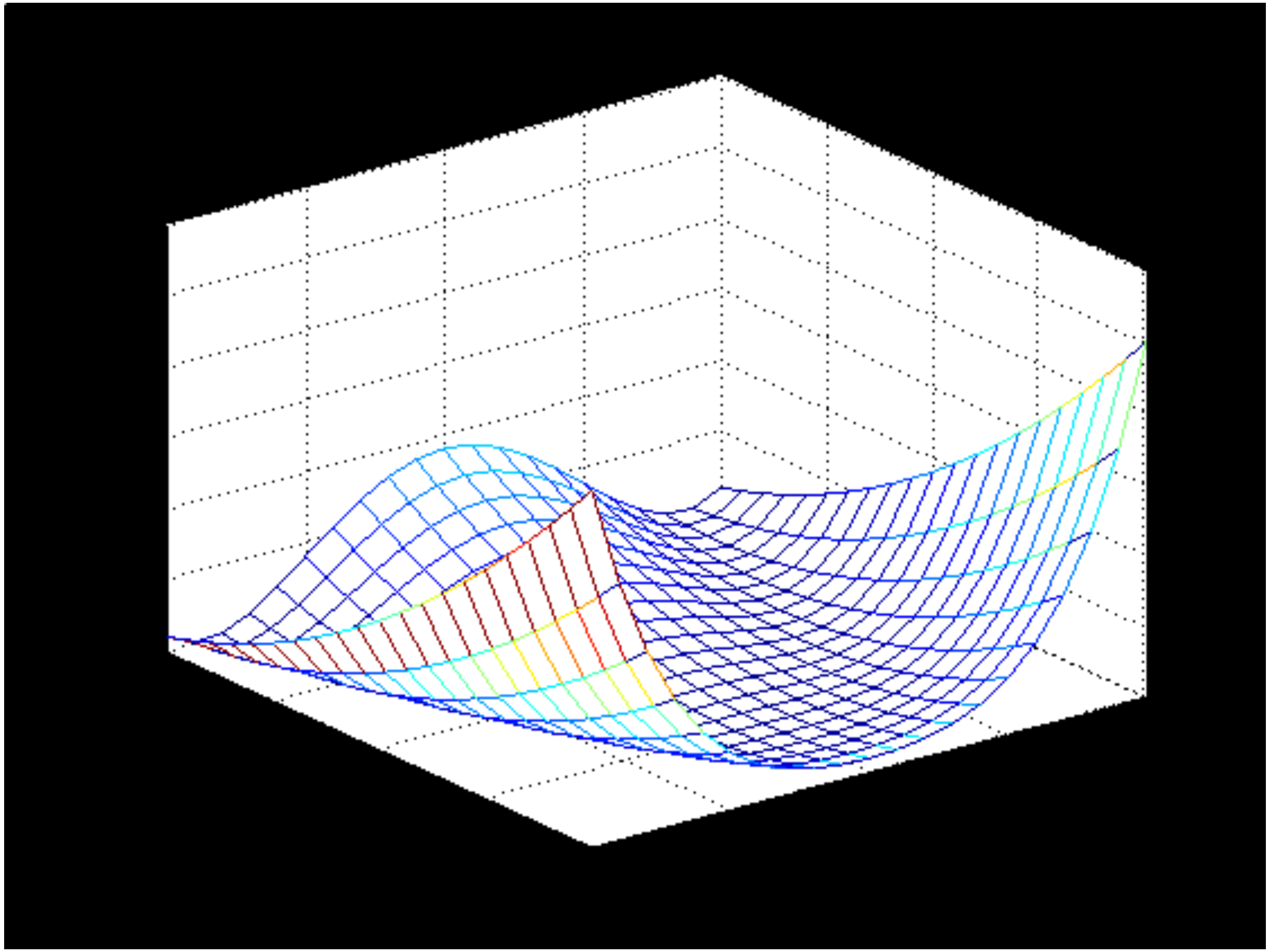
Un contour de niveau c est l'ensemble des points $S(c) = \{x \mid f(x) = c\}$

Exemple: La fonction de Rosenbrock

$$f(x) = 100\left(x_2 - x_1^2\right)^2 + \left(1 - x_1\right)^2$$

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

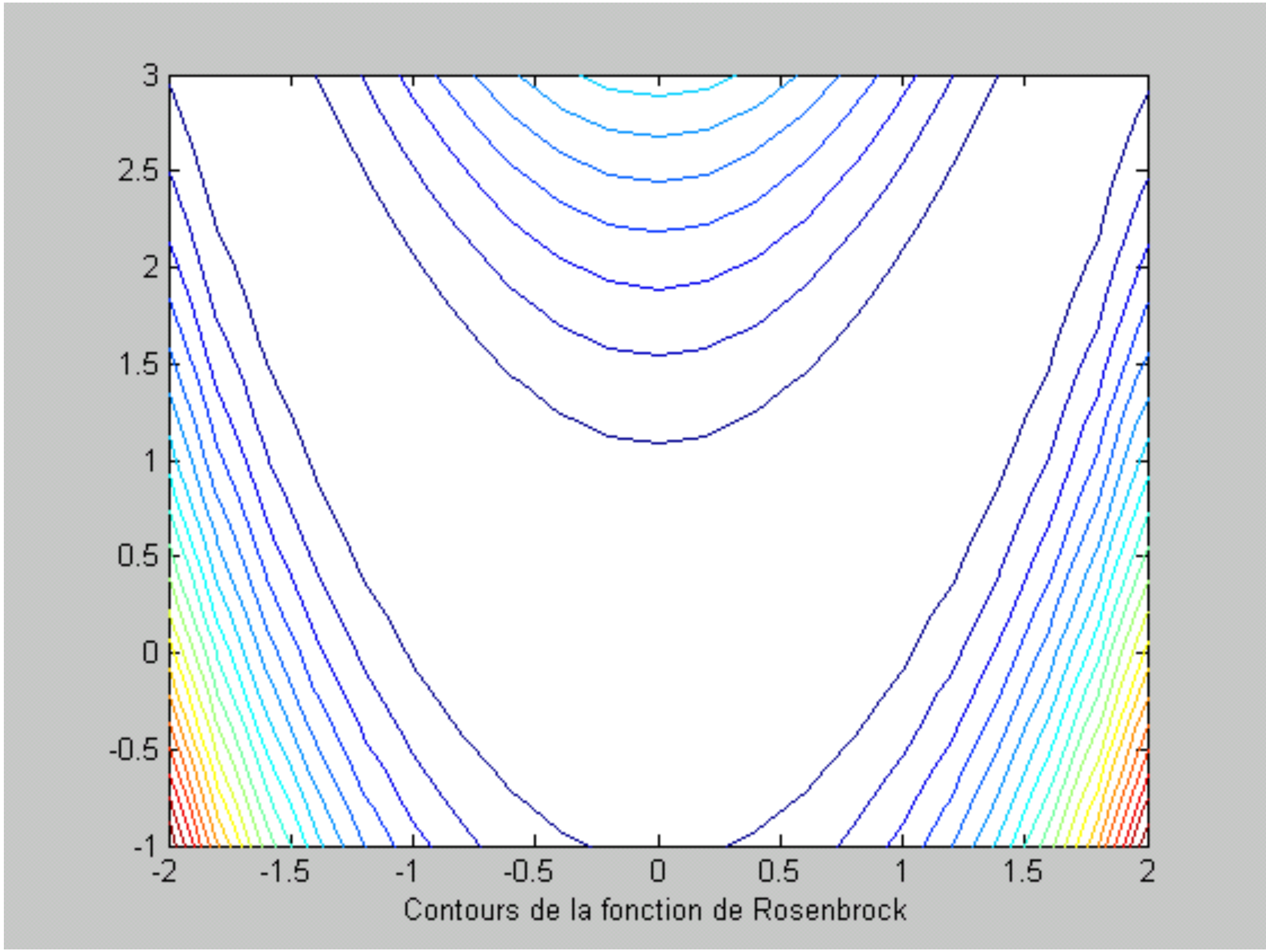
I.4 Gradient et Hessien (5)



Fonction de Rosenbrock

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.4 Gradient et Hessien (6)



I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.4 Gradient et Hessien (7)

I.4.5 Le gradient est ⊥ au contour

Démonstration:

Soit le contour S de niveau $f(x_0)$ passant par x_0 :

$$S = \{x \mid f(x) = f(x_0)\}$$

Soit une courbe $\in S$

paramétrée par $v(t)$, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$

avec $v(t_0) = x_0$ et $v(t) = x \in S$

La tangente à cette courbe en x_0 est de direction $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{t = t_0}$

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.4 Gradient et Hessien (8)

Nous avons que

$$f(v(t)) = f(v(t_0)) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt}(v(t)) \Big|_{t = t_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(v(t_0)) \frac{dv_1}{dt}\Big|_{t = t_0} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(v(t_0)) \frac{dv_n}{dt}\Big|_{t = t_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla f^T(x_0) \frac{dv}{dt}\Big|_{t = t_0} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0) \perp S \quad \text{en} \;\; x_0 \quad \forall x_0$$

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

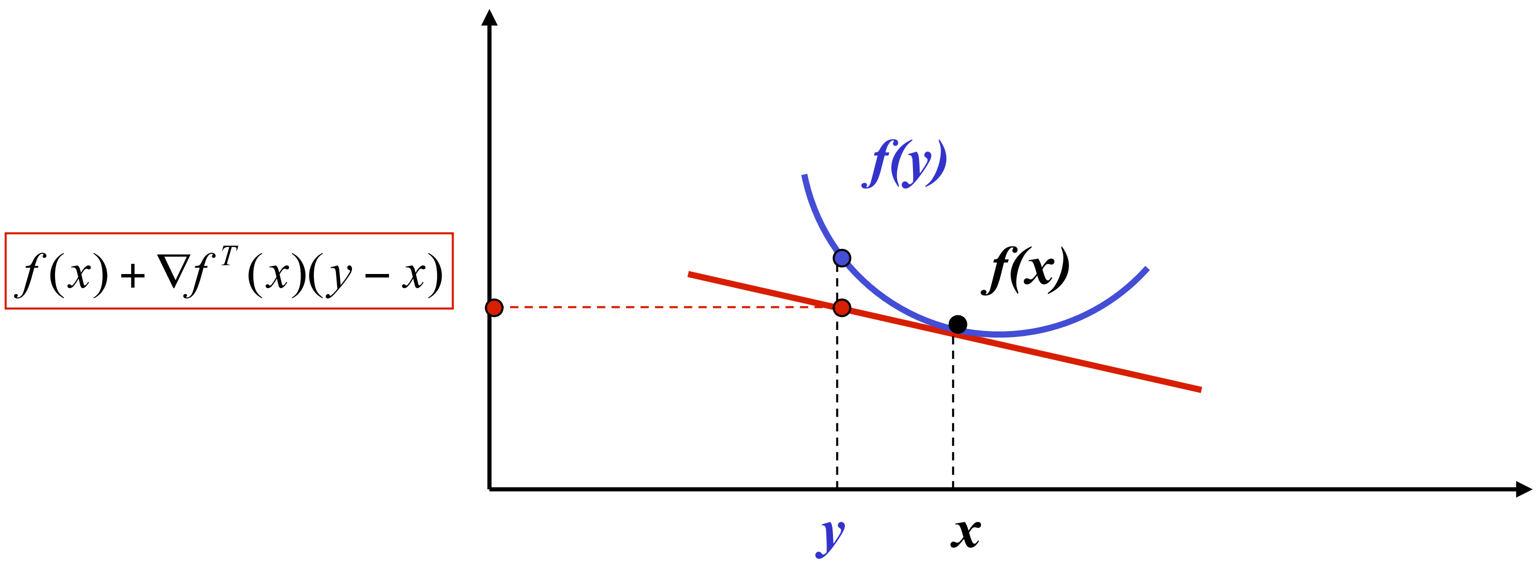
I.4 Gradient et Hessien (9)

I.4.6 Convexité et dérivabilité première

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \quad f \in C^1 \quad \Omega \in \mathbf{R^n}$ convexe

alors f est convexe ssi

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f^T(x)(y-x) \quad \forall x, y \in \Omega$$



I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.4 Gradient et Hessien (10)

I.4.7 Convexité et dérivabilité seconde

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ $\quad f \in C^2$ $\quad \Omega \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ convexe

Alors f est convexe ssi

$$(y - x)^T H(x)(y - x) \geq 0 \quad \forall x, y \in \Omega$$

Corollaire

Si $\Omega \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ est un ouvert convexe

Alors f est convexe ssi

$$H(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

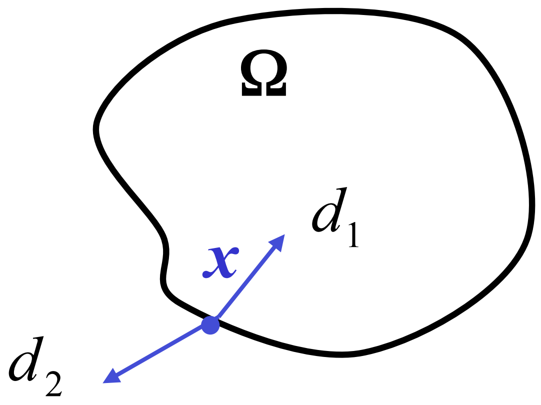
I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.5 Conditions nécessaires pour $\exists$ minimum (1)

I.5.1 Directions admissibles

$d \in \mathbf{R}^n \quad d \neq 0$ direction admissible en un point x

si $\quad \exists \eta > 0 \quad$ tel que $\quad x + \alpha d \in \Omega \quad \forall \alpha \in [0, \eta]$



d_1 *admissible*

d_2 *non admissible*

Si x est un point intérieur, alors toutes les directions sont admissibles

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.5 Conditions nécessaires pour ∃ minimum (2)

I.5.2 Condition nécessaire du 1er ordre

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \quad \Omega \subset \mathbf{R}^{\mathbf{n}} \quad f \in C^1$

Si f a un minimum local en $x^* \in \Omega$

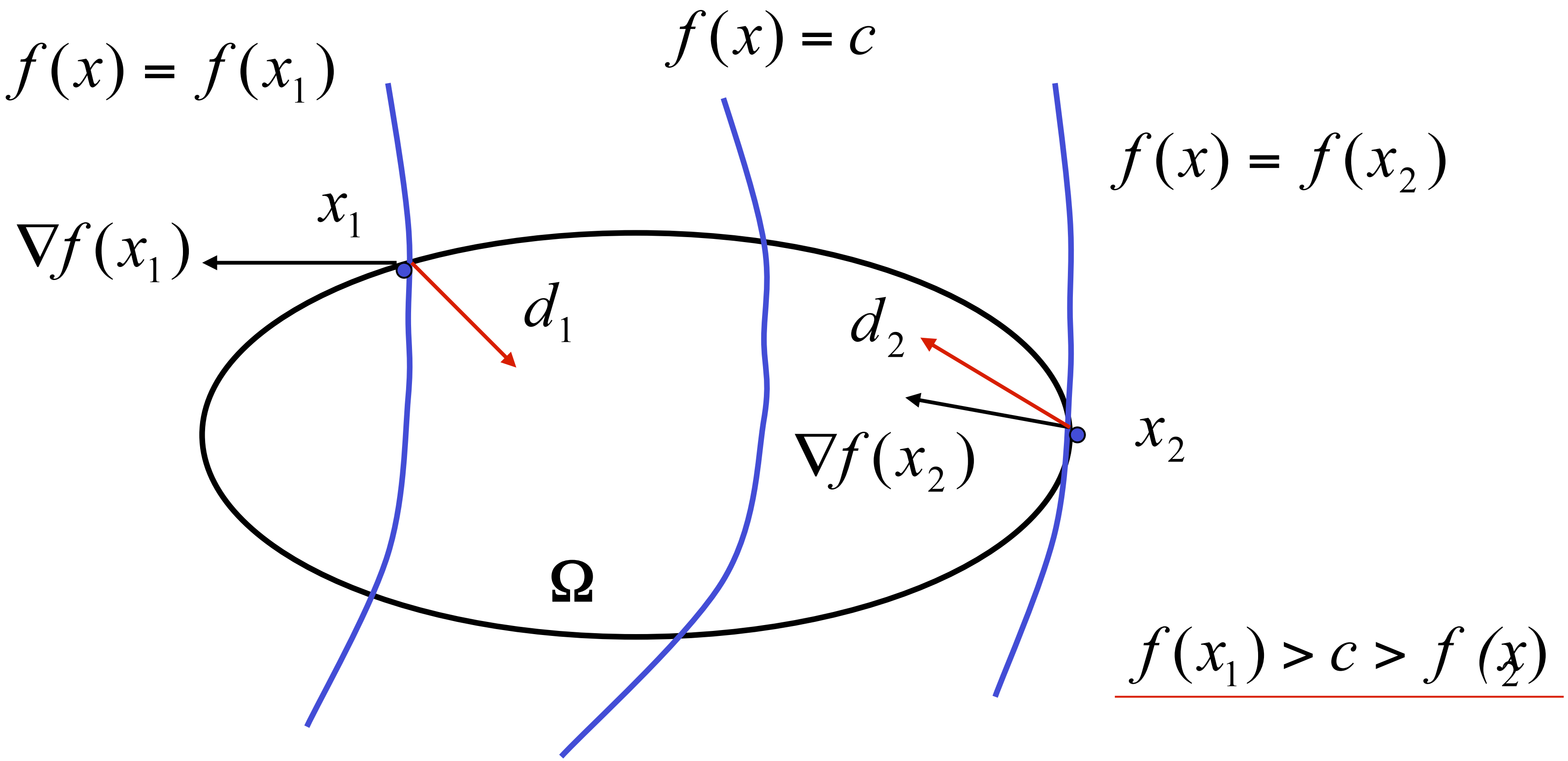
Alors $\forall d$ admissible en x^*

$$d^T \nabla f(x^*) \geq 0$$

⇔ Le taux d'accroissement est positif.

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.5 Conditions nécessaires pour ∃ minimum (3)



$\exists\, d_1$ admissible en $x_1 \;\middle|\; d_1^{\mathrm{T}} \nabla f(x_1) < 0 \quad \Rightarrow x_1$ ne minimise pas f

$\forall\, d_2$ admissible en x_2 , $\quad d_2^{\mathrm{T}} \nabla f(x_2) \geq 0 \quad \Rightarrow x_2$ minimise f (éventuellement)

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.5 Conditions nécessaires pour $\exists$ minimum (4)

Corollaire: cas du point intérieur

Soit $f : \Omega \to \mathbf{R} \quad \Omega \subset \mathbf{R^n} \quad f \in C^1$

Si x^* minimise f localement et si x^* est un point intérieur de Ω, alors

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Démonstration

$$d^T \nabla f(x^*) \geq 0 \qquad \forall d \in \mathbf{R^n}$$

$$\Rightarrow \quad d^T \nabla f(x^*) \geq 0 \quad \text{et}$$

$$-d^T \nabla f(x^*) \geq 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(x^*) = 0$$

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.5 Conditions nécessaires pour ∃ minimum (5)

I.5.3 Conditions nécessaires du 2ème ordre

Soit $f:\Omega \rightarrow \mathbf{R} \quad \Omega \subset \mathbf{R}^{\mathbf{n}} \quad f \in C^2$

f atteint un minimum local en x^* et d est une direction admissible

Si $d^T \nabla f(x^*) = 0$ alors $d^T H(x^*) d \geq 0$

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.5 Conditions nécessaires pour ∃ minimum (6)

Démonstration

Soit $x = x^* + \alpha d$

$$f(x) = f(x^*) + \frac{df(x)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}\alpha \quad + \quad \frac{d^2 f(x)}{d^2\alpha}\Big|_{\alpha=0}\frac{\alpha^2}{2} \quad + \quad O(\alpha^2)$$

$$= f(x^*) + \nabla f^T(x^*)d\alpha \quad + \quad d^T H(x^*)d\frac{\alpha^2}{2} \quad + \quad O(\alpha^2)$$

$$= f(x^*) + d^T H(x^*)d\frac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^2)$$

Si $H(x^*) < 0 \Rightarrow \exists\alpha \,|\, f(x) < f(x^*)$

$\Rightarrow H(x^*) \geq 0$

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.5 Conditions nécessaires pour ∃ minimum (7)

Corollaire : cas du point intérieur

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \quad \Omega \subset \mathbf{R}^{\mathbf{n}} \quad f \in C^2$

Si x^* est un point intérieur de **Ω** et x^* minimise f

Alors $\nabla f(x^*) = 0$

$H(x^*) \geq 0$

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.6 Conditions suffisantes pour ∃ minimum (1)

Conditions suffisantes pour un minimum

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \quad \Omega \subset \mathbf{R}^{\mathbf{n}} \; f \in C^2$ et x^* est un point intérieur de $\boldsymbol{\Omega}$

Si $\nabla f(x^*) = 0$

$H(x^*) > 0$

Alors f a un minimum local au sens strict en x^*

Démonstration

$$f(x^* + d) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T d + \frac{1}{2} d^T H(x^*) d + o(\|d\|^2)$$

$$= f(x^*) + \frac{1}{2} d^T H(x^*) d + o(\|d\|^2)$$

$\Rightarrow \forall d$ suffisamment petit : $\quad f(x^*) < f(x^* + d)$

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.6 Conditions suffisantes pour $\exists$ minimum (2)

Corollaire : cas des fonctions convexes

Soit $f \in C^2$, f convexe, $f : \Omega \to \mathbf{R}$ $\Omega \subset \mathbf{R}^\mathbf{n}$ convexe

Alors f a un minimum global en $x^* \in \Omega$

1° ssi $\nabla f^T(x^*)(y - x^*) \geq 0 \quad \forall y \in \Omega$

$\Leftrightarrow \nabla f^T(x^*) d \geq 0 \quad \forall$ direction admissible d

2° ssi $\nabla f(x^*) = 0$ si x^* est un point intérieur de Ω

Démonstration

Condition suffisante:

convexité $\Rightarrow f(y) - f(x^*) \geq \nabla f(x^*)^T (y - x^*) \geq 0 \quad \forall y \in \Omega$

$\Rightarrow f(y) \geq f(x^*)$

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

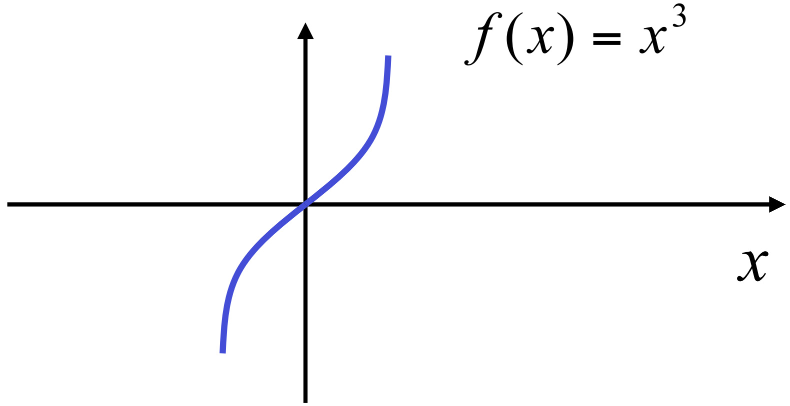
I.6 Conditions suffisantes pour ∃ minimum (3)

Exemples

1° $f(x) = x^3$

$f^{'}(0) = 0$

$f''(0) = 0$



Les conditions nécessaires sont vérifiées, mais *x=0* ne minimise pas *f*

2° $f(x) = x_1^2 - x_2^2$

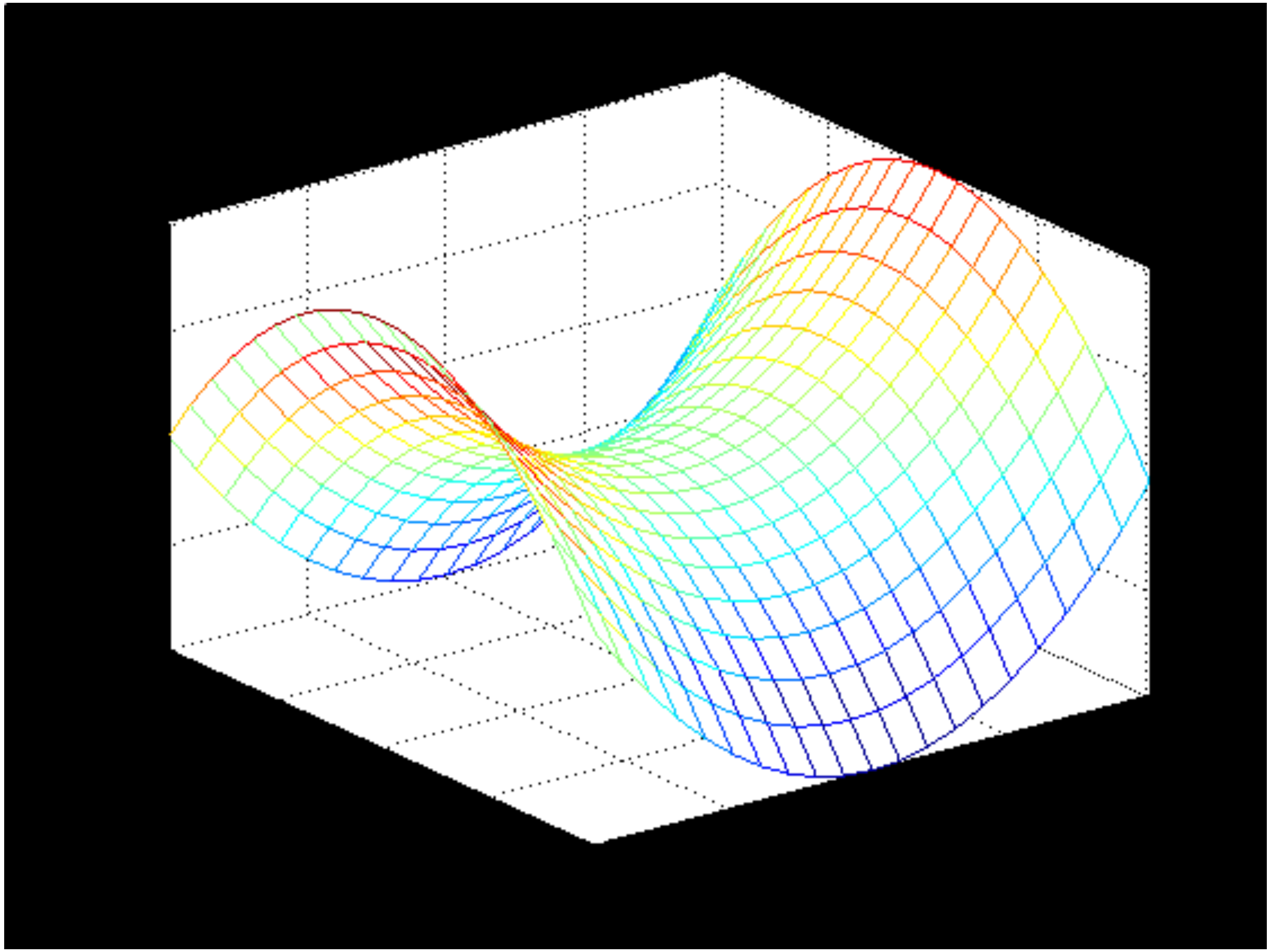
$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{en x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Indéfini => Les conditions nécessaires du 2ème ordre ne sont pas vérifiées => point selle

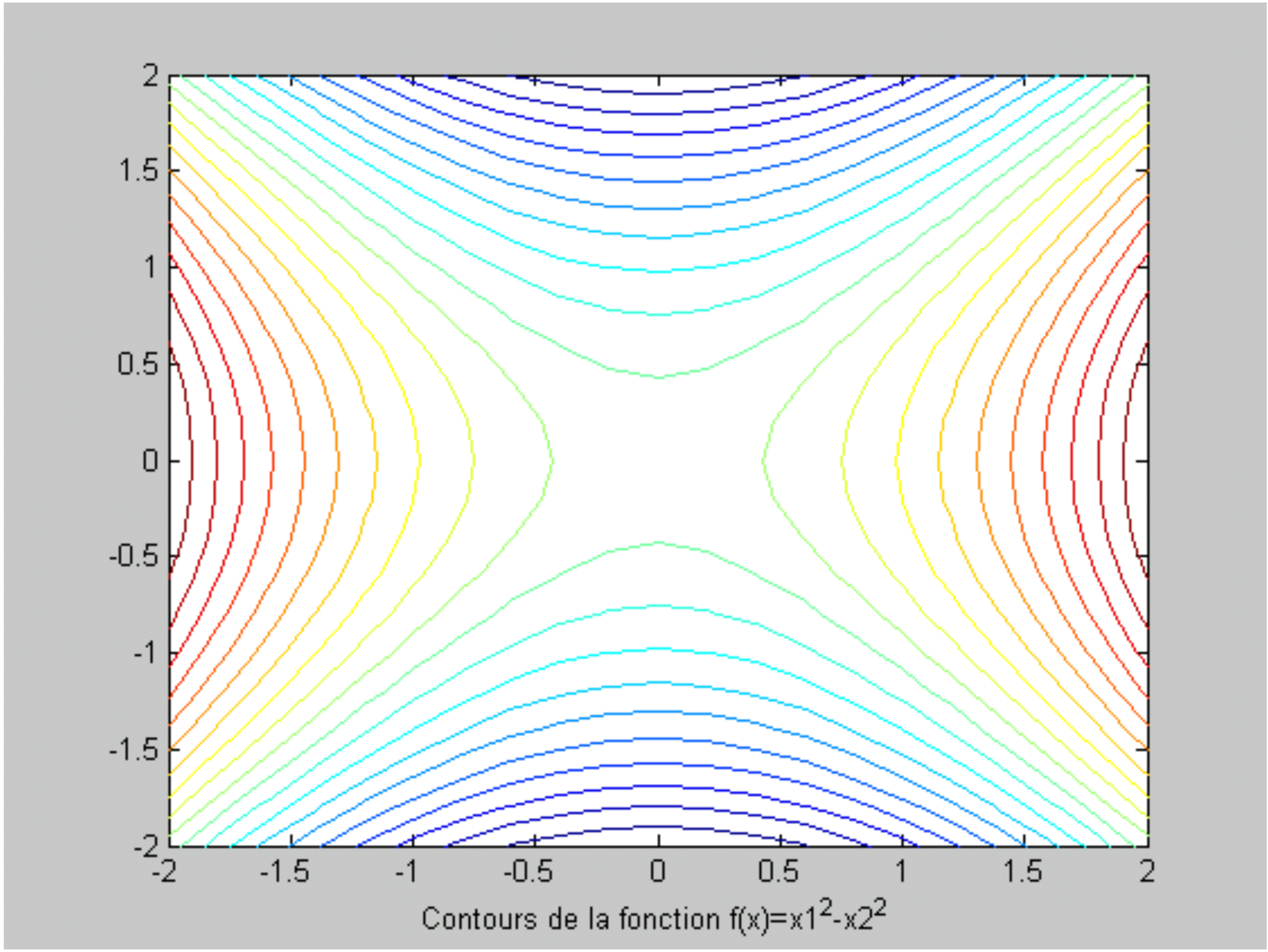
I.6 Conditions suffisantes pour ∃ minimum (4)



Point selle

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.6 Conditions suffisantes pour ∃ minimum (5)



I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.6 Conditions suffisantes pour ∃ minimum (6)

3° $f(x) = x_1^2 + x_2^2$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \qquad \nabla f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ en x } = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

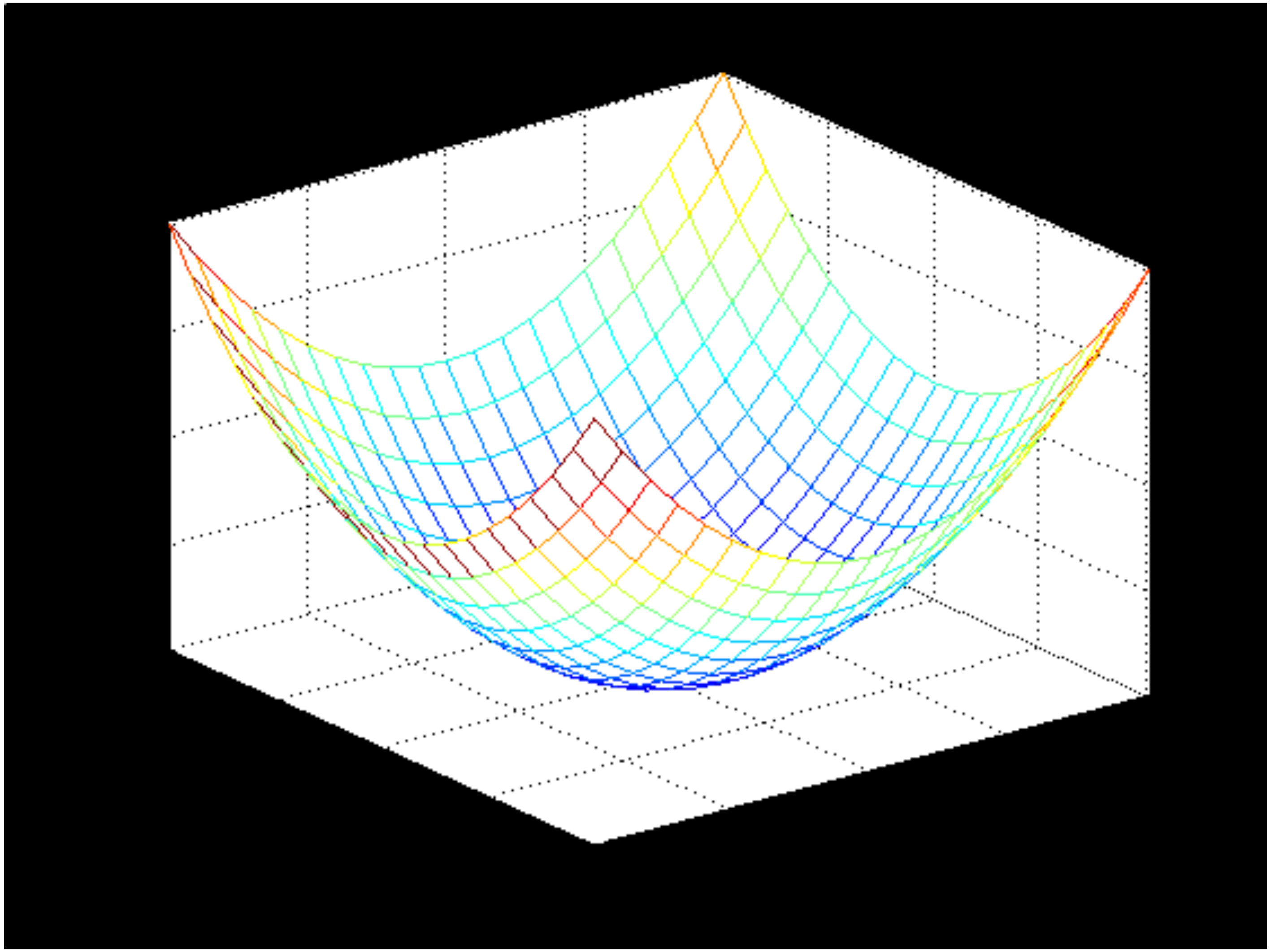
$$H(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0$$

=> minimum local au sens strict

f(x) convexe => minimum global au sens strict

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.6 Conditions suffisantes pour ∃ minimum (7)



Minimum

I. RAPPELS MATHEMATIQUES

I.6 Conditions suffisantes pour ∃ minimum (8)