Université de Strasbourg **Master IRIV**
Télécom Physique Strasbourg **Spécialité IRMC**

Algèbre et calcul matriciel

Devoir #2: Les matrices - seconde partie

1. Soit les matrices A, B et C suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Soit la matrice M diagonale par blocs telle que: $M = \text{diagonale}(A, B, C)$

a. Construire la matrice M

b. Calculer $P = M^T M$ et la trace de P

c. Montrer que la trace de $P =$ la somme des traces des matrices $A^T A$, $B^T B$ et $C^T C$

d. Montrer que l'inverse de la matrice M est diagonale par blocs

e. Calculer M^{-1} l'inverse de la matrice M par la méthode de Gauss-Jordan (par opérations élementaires sur les lignes de la matrice $[M\ I]$)

f. Vérifier que $M^{-1}M = I$

2. Soit les trois équations de plan suivantes:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

a. Ecrire le système d'équations sous forme matricielle : $Ax = b$

b. Inverser la matrice A par la méthode de Gauss-Jordan (par opérations élementaires sur les lignes de la matrice $[A\ I]$)

c. Vérifier le calcul de l'inverse de A en utilisant la fonction Matlab *inv(.)*

d. Calculer l'intersection des 3 plans par la méthode de Gauss-Jordan (par opérations élementaires sur les lignes de la matrice $[A\ b]$

e. Vérifier le calcul de cette intersection avec Matlab

3. Soit les matrices R_1 et R_2 suivantes:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

a. Montrer que R_1 et R_2 sont des matrices orthogonales (l'inverse est égal à la transposée)

b. Montrer que les matrices R_1 et R_2 sont des matrices de rotation qui transforment un vecteur X en un vecteur $Y_i = R_i X$ en lui appliquant une rotation d'angle θ_i autour d'un axe de rotation particulier. Indiquer l'axe de rotation et donner la valeur de θ_i

c. Calculer $Z = R_1 R_2 X + 2X$ avec $X = [1\ 1\ 1]^T$

d. Décrire la transformation dans l'espace subie par le vecteur X pour devenir le vecteur Z (en terme de rotation et de translation)